

Ortaokul Öğrencilerinin Sonsuzluğu Kavrayışları¹

Figen Bozkuş², Zülbiye Toluk Uçar³ ve İbrahim Çetin⁴

Öz: Bu araştırmanın amacı ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarını incelemektir. Araştırmanın çalışma grubunu üç farklı ortaokulda öğrenimine devam eden 176 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarını belirlemek amacıyla 4 açık uçlu sorudan oluşan bir test hazırlanmış ve uygulanmıştır. Ortaokul öğrencilerin kavrayışlarını derinlemesine incelemek için, testin ardından, 16 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmadan elde edilen veriler nitel içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, öğrencilerin sonsuzluk kavramını, “sonu olmayan”, “devam eden” ve “bitmeyen” şeklinde tarif ettikleri ve sonsuzluğu sonu olmayan bir süreç olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu tanımları yaparken, sonsuzluk kavramını matematiksel, fiziksel ve duygusal olmak üzere üç farklı kategoride düşündükleri belirlenmiştir. Öğrencilerin sonsuzluk tarifleri dinamik ve statik öğeler içermektedir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunda statik sonsuzluk düşüncesinin daha baskın olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sonsuzluk, en büyük sayı, ortaokul öğrencileri

DOI: 10.16949/turcomat.53890

Abstract: The purpose of this study was to investigate middle school students' understanding of infinity. The sample of the study consisted of 176 students from three middle schools. To explore students' understanding of infinity, a test including four open-ended questions was administered. Following the test, semi-structured interviews were conducted to produce in-depth data related to students' understandings of the infinity concept. The data were analyzed using qualitative content analysis method. Results of the study revealed that the participants described the infinity as “having no end”, “continuing” and “never-ending” and perceived infinity “as a process that never ends”. The participants' descriptions were categorized under three different headings, namely mathematical, physical and affective. Besides, it was found that students' descriptions include static and dynamic notions. It was observed that static infinity notion is common among students.

Keywords: Infinity, the largest number, middle school students

[See Extended Abstract](#)

1. Giriş

Sonsuzluk kavramı matematik tarihinde önemli bir yere ve öneme sahiptir. Sonsuzluk, uzun yıllar matematikçiler için hem bir ilham kaynağı olmuştur hem de uğraştırıcı bir rol üstlenmiştir. Benzer şekilde, çocukların matematiksel gelişiminde de önemli bir yere sahip olan sonsuzluk, onlar için ilginç olduğu kadar da zor bir kavramdır. Kuşkusuz bu zorlukların temelinde kavramın doğası gereği sahip olduğu soyut yapı önemli rol oynamaktadır (Falk, Gassner, Ben Zoor & Ben Simon, 1986; Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Kolar & Cadez, 2012). Bu kavramı anlamak için hayal edilebilenin hatta sezgilerimizin ötesine geçebilmek gereklidir. Fischbein, Tirosh ve Hess'e (1979) göre zihinsel şemalarımız sonlu gerçekliklere uyumlu olduğu için, sonsuzluk kavramı

¹ Bu makale “Ortaokul Öğrencilerinin Sonsuzluk Kavrayışları” (Bozkuş, 2014) adlı yüksek lisans tezine dayanmaktadır.

² Arş. Gör., Kocaeli Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, figen.bozkus@kocaeli.edu.tr

³ Doç. Dr., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, toluk_z@ibu.edu.tr

⁴ Yrd. Doç. Dr., Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, OFMA Eğitimi, ibretin@ibu.edu.tr

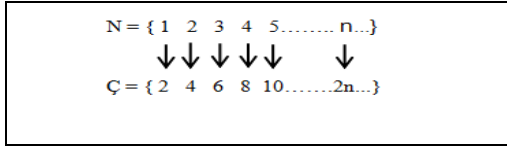
sezgilerimizle çelişki oluşturabilmektedir. Bu yüzden sonsuzluk öğrenciler tarafından öğrenilmesi zor ve zaman alan bir kavramdır.

Ortaokul matematik dersi öğretim programları (MEB, 2005a; 2013), incelendiğinde sonsuzluk ile ilgili herhangi bir kazanım olmamasına rağmen, öğrencilerin matematiksel sonsuzluğa dair ilk düşüncelerini sayılar, rasyonel sayılar, doğru ve doğru parçası gibi matematiksel kavramların öğretimi ile birlikte geliştirmeye başladığı öngörülebilir. Jirotkova ve Littler (2004) amaçlı bir öğretim olmadan geliştirilen bu düşüncelerin sezgisel düzeyde olduğunu ve öğrencilerin bu sezgileri sonsuzlukla ilgili gelişmiş bir kavrayış gerektiren derslere taşıdıklarını ileri sürmüştür. Öğrencilerin lise öncesi matematik derslerinde geliştirmiş oldukları sezgileri onların sonsuzluk kavramını formal olarak öğrenmelerinde bir sorun teşkil edebilir, çünkü sahip olunan sezgiler kavrama ilişkin yanlış yorumlara veya çelişkilere yol açabilir (Fischbein, 2001; Jirotkova & Littler, 2004). Yapılan çalışmalar, öğrencilerde sonsuzluk sezgisinin var olduğunu ve amaçlı tartışmalar ile bu sezgilerin ortaya çıkarılabileceğini söylemektedir (Singer, 2002; Singer & Voica, 2003). Bu sebeple sonsuzluk kavramını ortaokul öğrencilerinin nasıl yorumladıklarının ortaya çıkarılması bu düşüncelerin doğasının anlaşılması açısından önem taşımaktadır. Öğrencilerin sahip olduğu sonsuzluk sezgisinin erken yaşlarda tanımlanması, matematik eğitimcilerine bu sezgilerin oluştuğu ortamlarda ve sonraki matematik derslerinde ne tür etkinliklerin ve tartışmaların yapılması gerektiğine dair ipuçları verebilir. Bu araştırma ile ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin ne olduğu ve bu düşüncelerin matematiksel sonsuzluk kavramı ile ne kadar örtüşüğünün belirlenmesi amaçlanmıştır.

1.1. Sonsuzluk Kavramı ve Matematiksel Sonsuzluk

Sonsuzluk kavramı öğrenciler tarafından karmaşık ve soyut olarak algılanan bir kavramdır (Kolar & Cadez, 2012). Literatürde potansiyel (potential) ve fiili (actual) sonsuzluk olmak üzere farklı iki sonsuzluktan bahsedilmektedir (Fischbein, Tirosch & Hess, 1979; Fischbein, 2001; Luis, Moreno & Waldegg, 1991). Bu kavramları ilk olarak ortaya atan Aristo, potansiyel sonsuzluğu sürekli devam eden fakat herhangi bir anında sonlu bir değere işaret eden sonsuzluk olarak tanımlamıştır (Luis, Moreno & Waldegg, 1991). Bu anlamda, doğal sayılarda potansiyel sonsuzluktan bahsedilebilir çünkü bir sayıya yeni bir sayı eklendiğinde bir önceki sayıdan farklı bir sayıya ulaşılmakta ve ekleme süreci sürekli devam etmektedir (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005). Sayıların eklenerek devam etmesi sonsuz bir süreci içermektedir. Biz bu süreci düşünebiliriz ancak pratikte gerçekleştiremeyiz (Kolar & Cadez, 2012). Fiili sonsuzluk olarak tanımlanan sonsuzluk ise bir bütün olarak sonsuzluğa işaret eder (Kolar & Cadez, 2012). Aristo, doğru parçasındaki sayıların sonsuzluğunu fiili sonsuzluk olarak tanımlamıştır. Çünkü doğru parçası bir bütündür ve sonsuz noktayı içermektedir. Aristo insan zihninin bir bütündeki sonsuz parçayı algılayamayacağını ve bütündeki sonsuz süreci düşünecek kapasitede olmadığını iddia etmiştir (aktaran Dubinsky ve ark., 2005). Bu nedenle fiili sonsuzluğu reddetmiş ve potansiyel sonsuzluğun varlığına inanmıştır.

Matematiksel sonsuzluğun gelişiminde önemli bir rolü olan matematikçi ise Cantor'dur. Cantor'un fiili sonsuzluğun varlığına dair düşünceleri başlangıçta matematikçiler tarafından çok katı bir şekilde reddedilmiştir (Jirotkova & Littler, 2004). Cantor ve Dedekind, sonsuz sayılar teorisini geliştirerek matematiksel sonsuzluğun gelişimine önemli katkıda bulunmuşlardır (Sacristan, 1997). Cantor sonsuz iki kümenin eleman sayılarını saymak mümkün olmasa da, iki küme arasında 1-1 eşleme yaparak, bu iki kümenin aynı kardinaliteye (aynı sayıda elemana) sahip olduğunun gösterilebileceğini söylemiştir (Allen, 2000). Örneğin doğal sayılar kümesi ile çift doğal sayılar kümesi düşünüldüğünde çift doğal sayılar kümesinde olmayıp doğal sayılar kümesinde var olan sonsuz sayıdan bahsedilebilir. Fakat Cantor'un teorisine göre, sonsuz olan bu iki kümenin eleman sayısı sayılamıyor olsa da bu iki küme arasında 1-1 eşleme yapılabilir.



Şekil 1. Birebir eşleme

İki küme arasında yukarıdaki gibi bir eşleme yapıldığında bu eşlemenin birebir ve örten olduğu görülecektir. Böylece iki kümenin kardinalitesinin aynı olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Sonsuzluk kavramının tarihsel gelişiminin sancılı bir süreç olmasına paralel bir şekilde çocuklardaki gelişimi de belirli güçlükler içermektedir (Kolar & Cadez, 2012). Sonsuzluk kavramı ile yaşanan çelişkileri, Fischbein (2001), potansiyel ve fiili sonsuzluk kavramlarını sezgisel açıdan değerlendirerek açıklamıştır ve sezgisel olarak düşünüldüğünde potansiyel sonsuzluğu anlamada sorun olmadığını fakat fiili sonsuzlukta çelişkiler yaşadığımızı belirtmiştir. Fischbein'e göre potansiyel sonsuzluk, sonsuz süreç ve sonsuz kümeleri ifade etmektedir. Sonsuz süreçlerin, sonsuzluğun dinamik formunu temsil ettiği ve bizim bu süreci sezgisel olarak anlayabileceğimizi belirtmiştir. Buna örnek olarak doğal sayıları ele almış, doğal sayıların tamamını kavrayamayacağımızı ama her doğal sayıdan sonra bir doğal sayı geldiğini anlayabileceğimizi ifade etmiştir. Çünkü sayılar her ne kadar büyük olsa da ardından mutlaka bir sayı gelmektedir. Bu nedenle Fischbein, potansiyel sonsuzluğu sezgisel olarak anlayabileceğimizi belirtmiştir. Ancak aynı durum fiili sonsuzluk için geçerli değildir. Fischbein'e göre aklımızın almadığı, varlığını neredeyse imkansız olarak görülen fiili sonsuzluk; bir doğru parçasındaki sonsuz nokta ve gerçek sayıların sonsuzluğudur. Fischbein, fiili sonsuzluğu anlamının bizim için çok zor olduğunu dile getirmiştir. Bunun nedenini ise sürekli sonlu olan şeyler ile meşgul olduğumuz ve sonlu gerçeklere odaklandığımız için fiili sonsuzluğun bizim mantık şemalarımızın dışında kaldığı şeklinde açıklamıştır. Örneğin matematiksel olarak, doğal sayılar ile çift doğal sayıların kardinalitesinin, bire-bir eşleme yöntemi ile, aynı olduğu sonucuna varabiliriz ya da farklı uzunluktaki doğru parçaları üzerinde aynı sayıda nokta

olduğu sonucuna ulaşabiliriz. Fakat Fischbein sezgisel olarak öğrencilerin bu sonuçları kavramakta güçlük çektiğini ifade etmiştir. Bu nedenle Fischbein, fiili sonsuzluğun matematiksel ve kavramsal olarak kabul edilebilir ama sezgisel olarak kabul edilemeyen bir kavram olduğunu belirtmiştir.

1.2. Sonsuzluk kavramı ile ilgili literatür

Sonsuzluk kavramı ile ilgili alan yazın incelendiğinde, ilköğretim, ortaöğretim, yüksek öğretim ve matematik öğretmenleri olmak üzere farklı yaş grupları ile yapılan çalışmalar mevcuttur. İlköğretim öğrencileri ile yapılan çalışmalarda öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin ne olduğu ortaya koyulmuştur (Aztekin, 2008; Jirotkova & Littler, 2004; Narlı ve Narlı, 2013; Nunez, 1993; Pehkonen, Hannula, Maijala & Soro, 2006; Singer & Voica, 2007, 2008). Çalışmalardan elde edilen bulgular, öğrencilerin genel olarak sonsuzluk ile ilgili ilk düşüncelerinin, sonsuzluğu devam eden, bitmeyen bir süreç, bitmeyen büyüklük, sınırsızlık olarak algıladıkları yönündedir (Aztekin, 2008; Jirotkova & Littler, 2004; Narlı ve Narlı, 2013; Nunez, 1993). Bu bulgular, öğrencilerde sezgisel olarak sonsuzluk algısının var olduğunu göstermektedir. Aynı zamanda sonsuzluğun devam eden ve bitmeyen süreç olarak betimlenmesi potansiyel sonsuzluğa işaret etmektedir. Dolayısıyla öğrencilerde potansiyel sonsuzluk düşüncesinin de var olduğu söylenebilir.

Bu bağlamda Fischbein ve arkadaşları (1979) 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin sonsuzluk sezgisini anlamaya çalışmıştır. Bu amaçla öğrencilerden doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümesini eleman sayısı bakımından karşılaştırmalarını istemiştir. Çalışma sonucunda, öğrencilerin çoğunun “doğal sayılar çift doğal sayıları kapsar” ve “doğal sayılar kümesi çift doğal sayılar kümesinden daha fazla elemana sahiptir” argümanlarını oluşturdukları gözlemlenmiştir. Söz konusu soruda öğrencilerin, %10’u doğal sayılar ve çift doğal sayılar kümelerinin sonsuz olduğunu söylemişlerdir. Fischbein ve arkadaşları, bu cevaplar sonucunda öğrencilerin “bütün parçadan büyüktür” ifadesini sonsuz büyüklükler için de genelledikleri sonucuna varmıştır. Fischbein ve arkadaşları, aynı içerikli fakat farklı gösterimde bir başka soruda, öğrencilerden bir doğru parçasındaki nokta sayısı ile bir karedeki nokta sayısını karşılaştırmalarını istemişlerdir. Öğrencilerin %27’sinin her iki durumda da nokta sayısı için sonsuzdur cevabını verdikleri görülmüştür. Fischbein ve arkadaşları, bu bulgular sonucunda öğrencilerdeki sonsuz kavramının sezgisel bir düşünce olduğunu ifade etmiştir.

Singer ve Voica (2003) tarafından yapılan bir başka çalışmada da, 10-14 yaş çocukların sonsuzluk kavramı ile ilgili sezgileri incelenmiştir. Bu bağlamda çocuklara sonsuz kümeler ile ilgili sorular sorulmuştur. Çalışma sonucunda, 11 yaşındaki çocukların, en büyük doğal sayının olmadığını söyleyebildikleri görülmüştür. Bununla beraber çocukların sonsuz bir kümenin neden sonsuz olduğunu “*N sonsuzdur çünkü en büyük sayıyı yazamayız. Aynı şekilde 2 ile 3 arasındaki bütün ondalık sayıları yazamayız. Bu yüzden küme sonsuzdur.*” gibi argümanlar ile açıkladıkları görülmüştür. Beşinci sınıf öğrencilerine farklı kümelerin karşılaştırılması sorulduğunda, öğrencilerin kümeler

arasındaki ilişkiyi açıklayan kurallar buldukları ve farklı yöntemler ile sayılabilir sonsuzluğu ele aldıkları gözlemlenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili sezgisel düşüncelerini, matematiksel bilgileri ile birleştirdikleri tespit edilmiştir. Singer ve Voica (2003), elde edilen bulgular doğrultusunda 10 yaşındaki çocuklarda sonsuzluğun sezgisel bir düşünce olarak önceden var olduğunu ve yapılan konuşmalar ile bu sezginin ortaya çıkarılabileceğini ifade etmişlerdir. Benzer çalışmalar ile de bu sonuç desteklenmiştir (Singer, 2002; Singer & Voica, 2007; 2008; Tall, 1980). Tall (1980), çocuklardaki sonsuzlukla ilgili sezgisel düşüncelerinin üzerinde durulması gerektiğini belirterek sonsuzluk sezgisinin, sonsuzluk kavramının matematiksel olarak anlamlandırma sürecinde önemli olduğunu vurgulamıştır.

Diğer yandan, bazı çalışmalarda sonsuzluk düşüncesi potansiyel ve fiili sonsuzluk çerçevesinde ele alınmaktadır. Yapılan çalışmalar öğrencilerde potansiyel sonsuzluk düşüncesinin ağır bastığını göstermektedir (Aztekin, 2008; Boero, Douek & Garuti, 2003; Hauchart & Rouche, 1987; Nunez, 1993). Boero ve arkadaşları (2003) tarafından yapılan bir çalışmada 59 beşinci sınıf öğrencisinin eğitim bağlamında ve kültürel bağlamda sayıların sonsuzluğu ile ilgili ne düşündükleri ortaya konulmak istenmiştir. Bu amaçla öğrencilere ilk olarak “Kaç tane sayı vardır?” sorusu sorulmuş ve daha sonra “1 ve 2 arasında kaç sayı vardır?” şeklindeki sorular ile sayılar üzerine öğrencilere tartışma ortamı sağlamışlardır. Öğrencilerin, 1 ile 2 arasındaki sayılar için önce sınırlı miktarda sayı olduğunu söyledikleri daha sonra arkadaşları ile birlikte düşününce “son sayıyı söyleyemem, sonsuza kadar sayabilirim” şeklinde argümanlar oluşturdukları gözlemlenmiştir. Yine öğrencilerin sayıların miktarı ile ilgili “sayılar sonsuzdur, çünkü sayıları düşündüğümüzde sürekli büyürler ve bir sınırı yoktur.”, “sayılar küçülebilir, 0.1; 0.01; 0.001” gibi argümanlar oluşturduğu elde edilen bulgular arasındadır. Boero ve arkadaşları (2003), elde edilen bu cevapların, öğrencilerin sayılar ile ilgili sonlu boyuttan sonsuz boyuta geçiş yapabildiğinin göstergesi olduğunu ifade etmiştir. Bununla beraber, elde edilen bu bulgulardan bazı öğrencilerin potansiyel sonsuzluk düşüncesine sahip oldukları gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, bir başka çalışmada Nunez (1993), 9-14 yaş öğrencilerinin, sonsuz süreçlerle ilgili algılarını ve zihinsel olarak yapılandırma süreçlerini incelemiştir. Nunez (1993), öğrencilerin fiili sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin olmadığını ve yorumlarının potansiyel sonsuzluk ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Nunez (1993), bunun nedenini, çocuklarda fiili sonsuzluk ile ilgili kavram yapılarının 15 yaş öncesinde oluşmadığı şeklinde ortaya koymuştur. Hauchart ve Rouche (1987), bu yaştaki öğrencilerin fiili sonsuzluk kavramına sahip olmadığını, bu kavramın limit kavramı ile ilgili olduğunu söyleyerek öğrencilerdeki sonsuzluk düşüncesinin potansiyel sonsuzluk yönünde olduğu sonucunu desteklemiştir.

Yukarıda özetlenen araştırmalar çocukların formal öğrenim öncesi ve sonrası sonsuzluk kavramı ile ilgili bazı düşüncelere sahip olduğunu göstermektedir. Daha çok sezgisel olarak tanımlanan öğrencilerin bu düşünceleri çok net olmayıp verilen bağlama göre değişebilmektedir (Fischbein ve ark., 1979; Jirotkova & Littler, 2008; Narlı ve Narlı, 2013; Pehkonen ve ark., 2006). Singer ve Voica (2007), çocukların sonsuzluk kavramı ile

İlgili sezgilerinin yeteri kadar gelişmiş olduğunu ve öğrencilerin bu sezgilere bağlı olarak doğal sayılar kümesi ile ilgili argümanlar oluşturabileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla çocuklarda var olan sonsuzluk sezgisinin tanımlanması öğrencilerin kavrayışlarının niteliğini arttırabilmek için onların sonsuzluk kavramına yönelik deneyimler kazanabileceği, daha zengin ve miktar olarak daha fazla, ortamların oluşturulması için önemlidir. Bu nedenle öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarının incelenmesi ve bu ortamların oluşturulmasına yönelik daha iyi bir anlayış sağlayabilir. Ancak bu amaçla yapılan çalışmalara daha çok uluslararası literatürde rastlanmaktadır. Türkiye bağlamında az sayıda çalışma olduğu görülmektedir (Aztekin, 2008; Çelik ve Akşan, 2013; Güven ve Karataş, 2004; İşleyen, 2013; Narlı ve Narlı, 2013). Bu çalışmaların hedef kitlesini ise, ortaöğretim öğrencileri (İşleyen, 2013), matematik öğretmen adayları (Çelik ve Akşan, 2013; Güven ve Karataş, 2004) ve doktora öğrencileri (Aztekin, 2008) oluşturmaktadır. Ortaokul öğrencilerine yönelik çok az sayıda çalışmaya rastlanmıştır (Aztekin, 2008; Narlı ve Narlı, 2013). Yapılan çalışmaların sayıca yetersiz olması ve diğerlerinden farklı olarak bu çalışmada potansiyel ve fiili sonsuzluk bağlamında öğrencilerin sonsuzluk anlayışlarının incelenmesinin literatüre katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, literatürde iddia edildiği üzere öğrenciler için soyut ve anlaşılması zor olması, başka matematiksel kavramların öğretimini etkilemesi ve ortaokul öğretim programında öğretime dair bir vurgunun bulunmaması sebebiyle Türkiye bağlamında ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışlarının ortaya çıkarılması önem arz etmektedir. Bu nedenle bu çalışmada ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

2. Yöntem

Bu araştırma ortaokul 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin sonsuzluk kavramı ile ilgili kavrayışlarını ve bu kavrayışların sınıf düzeyine göre değişimini belirlemeye yöneliktir. Bu amaçla çalışmada, nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır.

2.1. Katılımcılar

Araştırma, 3 farklı ortaokulda öğrenimine devam eden 176 öğrenci ile yürütülmüştür. Sınıf seviyelerine göre katılımcı öğrenci sayısı Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Sınıf seviyelerine göre katılımcılar

Sınıf Seviyesi	Öğrenci Sayısı
5. sınıf	50
6. sınıf	40
7. sınıf	44
8. sınıf	42
Toplam	176

Verilerinin zenginliği ve çeşitliliğin artırılması amacıyla araştırmanın üç farklı okulda yapılmasına karar verilmiştir. Okulların seçiminde, MEB tarafından yapılan SBS

sınavının son üç yıllık sonuçları göz önünde bulundurulmuştur. Bu okulların başarı düzeyleri; iki okulun başarı düzeyi iyi seviyede, bir okulun ise orta seviye şeklindedir. Farklı okulların seçilmesindeki amaç örneklem çeşitliliğinin artırılmak istenmesidir. Farklı sınıf seviyelerinden öğrencilerin seçilmesinin amacı ise ortaokul öğrencilerinin sonsuzluğa yönelik kavrayışlarının sınıflara göre nasıl farklılık gösterdiğini ortaya çıkarmaktır. Bu bağlamda, çalışmanın yürütüldüğü okullarda, her sınıf seviyesinden amaçlı örnekleme ile ikişer sınıf belirlenmiştir ve 176 öğrenci çalışmanın örneklemini oluşturmuştur.

2.2. Veri Toplama Araçları ve Uygulama

Veriler, sonsuzluk testi ve klinik mülakatlar ile toplanmıştır. Sonsuzluk testinin hazırlanmasında, literatürden yararlanılmıştır. Birinci soru, üçüncü ve dördüncü soru literatürde farklı çalışmalarda (örnk: Kolar & Cadez, 2012; Maria, Thanasia, Katerina, Constantinos & George, 2009; Pehkonen ve ark., 2006) yaygın olarak kullanılan sorulardan olup, ikinci soru ise araştırmacılar tarafından hazırlanmıştır. Test hazırlandıktan sonra 3 matematik öğretmeni ve 3 alan uzmanından soruların anlaşılabilirliği ve araştırmanın amacına uygunluğu açısından görüşler alınmıştır. Test dört açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Testte yer alan sorular Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Sonsuzluk testindeki sorular

Bölüm I:

1) Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.

Bölüm II:

2) Aşağıda verilen ifadede noktalı yere kaç tane sayı yazılabilir? Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.

3 <....

3) 0 ile 1 arasında kaç tane kesir vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayarak yazınız.

4) En büyük sayı var mıdır? Cevabınızı nedenleri ile açıklayarak yazınız.

Tablo 2'de görüldüğü üzere test iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, öğrencilerin sonsuzluk kavramını kendi kelimeleri ile tanımlaması ve örnek vererek açıklaması istenmiştir. Bu soru ile öğrencideki sonsuzluk düşüncesinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Diğer üç soru ise sayılar bağlamında olup, öğrencilerin sayı bağlamında sonsuzluk ile ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarılması istenmiştir. Birinci bölümde sorulan soru daha çok öğrencilerin daha genel sonsuzluk düşüncelerini sorgularken, ikinci bölümde ise öğrencilerde matematiksel sonsuzluk olarak hangi sonsuzluğun ön plana çıktığı sorgulanmıştır.

Sonsuzluk testi bir ders saatinde öğrencilere, araştırmacı tarafından uygulanmıştır. Testin ardından öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine ortaya koymak için klinik mülakatlar yapılmıştır. Her sınıf seviyesinden 4 öğrenci olmak üzere toplam 16 öğrenci ile klinik mülakat yapılmıştır. Mülakat yapılan öğrencilerin seçiminde, sonsuzluk testindeki öğrenci cevapları göz önünde bulundurulmuştur. Bunun yanı sıra, kendini iyi ifade

edebilen ve düşüncelerini daha rahat söyleyebilen öğrencilerin seçilmesi açısından öğretmen görüşleri dikkate alınmış ve seçilen öğrencilerin gönüllü olması göz önünde bulundurulmuştur. Mülakat soruları, öğrencilerin testteki cevapları doğrultusunda hazırlanan ve görüşme sürecinde sorulan anlık sorulardan oluşmaktadır. Mülakatlarda öğrencilere, verdikleri cevapları nedenleriyle daha ayrıntılı açıklama yapmaya yönlendiren sorular sorulmuştur. Örneğin, “*Bu cevabını biraz daha açabilir misin?*”, “*Burada ne demek istedin?*” ve “*Bu sonuca nasıl vardın?*” gibi genel sorular ve bunun yanı sıra öğrenci cevabına yönelik spesifik sorular sorulmuştur. Mülakatlar birinci yazar tarafından 30-40 dakika arasında bir sürede yapılmıştır. Mülakatlar, ses kayıt cihazı ile araştırmacı tarafından kaydedilmiş ve analiz için deşifre edilmiştir.

2.3. Verilerin Analizi

Sonsuzluk testinden ve görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde nitel içerik analizi kullanılmıştır. Öncelikle sonsuzluk testinde elde edilen veriler analiz edilmiş, kod tablosu oluşturulmuş, daha sonra ortaya çıkan kodlama tablosu kullanılarak görüşme verileri analiz edilmiştir. Veri analizi dört aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada üç araştırmacı eş zamanlı olarak, içinde kategorilerin ve alt kategorilerin olduğu kodlama tablosunu oluşturmuştur. Kodlama tablosu oluşturulurken literatürde var olan kodlamalardan (Kolar & Cadez, 2012; Pehkonen ve ark., 2006) yararlanılmıştır. Bununla birlikte testte verilen cevaplardan ortaya yeni çıkan kategoriler ve alt kategoriler de kodlama tablosuna eklenmiştir. İkinci aşamada her üç araştırmacı da Sonsuzluk Testinden elde edilen verinin belirli bir alt kümesini kodlamıştır. Daha sonra araştırmacılar bir araya gelerek yapılan kodlamaları karşılaştırmıştır. Sonuç olarak kodlama tablosundaki problemler ve kodlamalar arasındaki farklılıklar giderilmiştir. Üçüncü aşamada ise araştırmacılar kodlayıcılar-arası güvenilirliği test etmek için görüşme verisinin rastgele seçilmiş %10'luk bir kısmını kodlamışlardır. Kodlayıcılar arasında %89 oranında uyum sağlandığı görülmüştür. Bunu takiben kodlayıcılar arasındaki farklar giderilerek kodlamanın son haline karar verilmiştir ve kodlama yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar bulgulara yansıtılmıştır.

3. Bulgular

Bu çalışmada, ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk ile ilgili kavrayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu amaçla, testteki sorulara ait nicel bulgular soru başlıkları altında ele alınacaktır. Bununla birlikte her soru için nicel bulguların devamında sonsuzluk testinden elde edilen kısa öğrenci cevapları ve klinik mülakatlardan elde edilen veriler öğrencilerden alınan alıntılar ile desteklenerek nitel olarak sunulacaktır.

3.1. Öğrencilerin sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamaları

Testin birinci sorusu olan, “*Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.*” sorusu ile ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk hakkında ne düşündüklerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğrencilerin, sonsuzluğu genel olarak “sonu olmayan”, “bitmeyen” ve “devam eden” şeklinde tanımladıkları görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin sonsuzluk kavrayışlarını belirlerken vermiş oldukları örnekler de dikkate alınmıştır. Buradan hareketle fiziksel sonsuzluk, duygusal-manevi sonsuzluk, matematiksel

sonsuzluk ve sınıflandırılmayan şeklinde dört kategori oluşturulmuştur. Bu kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı Tablo 3' de verilmiştir.

Tablo 3. Birinci soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	Sınıf Seviyesi									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
<i>Fiziksel Sonsuzluk</i>	17	34	12	30	8	18	7	17	44	25
<i>Duygusal-Manevi Sonsuzluk</i>	8	16	11	27	8	18	9	21	36	20
<i>Matematiksel Sonsuzluk</i>	11	22	8	20	13	30	10	24	42	24
<i>Sınıflandırılmayan</i>	14	28	9	23	15	34	16	38	54	31
Toplam	50		40		44		42		176	%100

Fiziksel sonsuzluk kategorisinde, öğrenciler sonsuzluğu fiziksel olarak var olan kavramlar üzerinden tanımlamışlardır. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir kısmı, gerçekte sayısı sınırlı olan fiziksel bir varlığı veya nesneyi örnek göstererek, bunların sonsuz olduğunu ifade etmişlerdir. Örnek olarak eşya, insan sayısı, yaşam ve çöldeki kum taneciklerini vermişlerdir. Bazı öğrenciler ise sonsuzluğu “sonu olmayan” şeklinde tanımlayarak, evren, uzay, gökyüzü ve kara delik gibi örnekleri kullanmışlardır. Bu kategoride yer alan ve testten elde edilen örnek öğrenci cevapları şu şekildedir:

“Sonsuzluk, sonsuza kadar devam eden, hiç bitmeyendir. Örnek; yaşam.” (7. sınıf)

“Sonsuzluk, sınırsızlık demektir. Kum tanecikleri gibi...” (6. sınıf)

“Sayısal olarak belli edilemeyen, yani evren sonsuzdur sürekli genişleyebilir.”(7. sınıf)

Bu kategoride yer alan 8. sınıf öğrencilerinden Ö16 görüşmede sonsuzlukla ilgili düşüncelerini şu şekilde açıklamıştır;

A: Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?

Ö16: Sonu olmayan evren gibi... gerçi sonu olup olmadığını bilemeyiz. Uçsuz bucaksız...

A: Cevabını biraz daha açabilir misin?

Ö16: Yani sonu olmayan şeylere örnek verdim. Sonsuzluk sonu olmayan, gittikçe giden, gittiğimizde sonuna varamadığımız, sürekli kendini yenileyen, devam eden...

A: Peki uçsuz bucaksız derken ne demek istedin?

Ö16: Sonunu göremediğimiz, ufuk çizgisi gibi...

Ö16'nın burada sonsuzluğu, uçsuz bucaksız olarak tanımlayıp ufuk çizgisi ile anlattığını görmekteyiz. Tablo 3'de görüldüğü üzere, öğrencilerin %25'inin sonsuzluk tanımları fiziksel sonsuzluk kategorisinde yer almaktadır. Sonsuzluk kavramı en fazla 5.sınıf öğrencileri ve 6. sınıf öğrencileri tarafından bu şekilde tanımlanmıştır.

Duygusal-Manevi sonsuzluk kategorisinde ise öğrenciler sevgi, mutluluk, aşk gibi duyguları, özgürlük, huzurlu olma gibi keyfiyet belirten durumları ve ölümsüzlüğü sonsuz olarak tanımlamışlardır. Bu kategoride yer alan öğrencilere göre sonsuzluk, soyut olarak nitelendirilen duygu, düşünce gibi durumları temsil etmektedir. Öğrencilerin %20'si sonsuzluğu bu şekilde tanımlamıştır. Tablo 3 incelendiğinde bu tanımların en fazla 6. sınıf öğrencileri ve 8. sınıf öğrencileri tarafından yapıldığı görülmektedir. Bu kategoriye örnek olabilecek testteki bazı öğrenci cevapları aşağıda sunulmuştur.

“Sonsuzluk hep rahat olmaktır, huzurlu olmaktır.” (6. sınıf)

“Hiç ölmek, ölümsüzlüktür.” (8. sınıf)

Bu kategoride yer alan 6. sınıf öğrencisi Ö5 görüşmede, sonsuzluk ile ilgili düşüncesini *“Sonsuzluk bana göre sevgi ve ailedir...”* şeklinde ifade ederek, sonsuz olmasını istediği şeyleri sonsuz olarak tanımlamıştır. Verilen cevaplarda da görüldüğü üzere öğrencilerin sonsuzluk algısı duygusal boyutta olup, sonsuzluğun tanımlanmasında aşk, sevgi, özgürlük gibi duygu metaforlarını kullanmaktadırlar. Öğrenciler yaşantıları sonucu doğal olarak geliştirdikleri, hissettikleri veya yaşadıkları duygularını sonsuzluk kavramı ile eşleştirmişlerdir.

Elde edilen diğer bir kategori ise matematiksel sonsuzluk olarak adlandırılmıştır. Bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuzluğu sayı, doğru ve çember gibi matematiksel kavramları kullanarak tanımlamışlardır. Bu şekilde tanım yapan öğrencilerin sonsuzluk algısı matematiksel sonsuzluk yönünde olduğu için bu kategoride değerlendirilmiştir. Matematiksel sonsuzluk kategorisi *“dinamik sonsuzluk”*, *“statik sonsuzluk”* ve *“büyük sayılar”* olmak üzere üç alt kategoriye ayrılmıştır. Literatürde potansiyel sonsuzluk olarak tanımlanan sonsuzluk bitmeyen, sürekli devam eden bir süreç anlamına gelmektedir (Kolar & Cadez, 2012). Potansiyel sonsuzluk, sonsuzluğun dinamik bir süreç olduğunu ifade etmektedir. Burada yer alan öğrencilerin tanımlarında da sonsuzluğun dinamik bir süreç olarak ifade edilmesi söz konusudur. Bu nedenle burada dinamik sonsuzluk kavramının kullanılması tercih edilmiştir. Bu kategoriye örnek olabilecek testteki bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

“Sonsuzluk hiç bitmeyen uçsuz bucaksız bir şey. Mesela sayılar uçsuz bucaksızdır asla sonunu bilemezsin. İstedikçe kadar say asla bitmezler.” (6. sınıf)

“Sonu olmayan, hiç bitmeyen şeylerdir. Mesela sayılar sonsuzdur ne kadar ileri gidersen git bitmez. (1,2,3,4).” (8. sınıf)

Bu kategoride yer alan 6. sınıf öğrencisi Ö6 görüşmede, sayıların sonsuz olduğunu söyleyerek sayıların bitmemesinin sonsuzluk anlamına geldiğini ifade etmiş ve

sonsuzluğu dinamik bir süreç olarak tanımlamıştır. Ö6 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

A: Size göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayınız.

Ö6: Bana göre sonsuzluk sınırsızlık demek. Örnek: sayılar

A: Cevabını biraz daha açabilir misin?

Ö6: Sayılar mesela sayma sayıları sonsuzdur. Sıfırdan mesela başlayıp sonsuza kadar giden sayılar.

A: Peki sayıların sonsuza kadar gitmesi senin için ne ifade ediyor?

Ö6: Sayıların sonsuza kadar gitmesi sayıların daha devam edebileceği anlamına gelir belki...

Matematiksel sonsuzluğun diğer bir kategorisi ise statik sonsuzluk kategorisidir. Statik sonsuzluk, sonsuzluğun bir bütün olarak düşünülmesidir. Örneğin “sayıların tamamının sonsuz olması...” gibi bir ifade yazılması, öğrencinin sonsuzluğu bir bütün olarak düşünebildiğini göstermektedir, dolayısıyla sonsuzluğun statik olması söz konusudur. Bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuz bir sürecin adımlarına odaklanmaktansa, sürecin tamamına odaklanmaktadırlar. Literatürde, fiili sonsuzluk olarak tanımlanan sonsuzluk bir bütün olarak sonsuzluğa işaret eder (Kolar & Cadez, 2012). Bunun yanı sıra fiili sonsuzluk kavrayışına sahip bir kişi sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görebilmektedir (Petty, 1996). Petty (1996), sonsuzluğu matematiksel nesne olarak görebilen bir kişinin sonsuzluk ile ilgili işlemleri yapabilecek seviyede olmasını gerektirdiğini belirtmiştir. Ancak burada yer alan öğrenci cevapları, öğrencilerin fiili sonsuzluk seviyesinde olduğunu söyleyebilmemiz için yeterli değildir. Burada söz konusu fiili sonsuzluk seviyesi öğrenciler için tanımlanan statik sonsuzluğa göre daha üst bir seviyedir. Bu nedenle fiili sonsuzluk yerine, öğrenci cevapları statik sonsuzluk olarak tanımlanmıştır. Bu kategoriye örnek bazı cevaplar şu şekildedir:

“Sonsuzluk rakamlardır, sayılardır. Çünkü sadece sayılar ve rakamlar sonsuzdur.”(6. sınıf)

“Sonsuzluk her şeyin sonsuz olması demektir. Örneğin sayılar...”(7. sınıf)

Bu kategoride yer alan 5. sınıf öğrencisi Ö1 görüşmede, sonsuzluğu ilk olarak sonu olmayan şeklinde tanımlamış ve dinamik sonsuzluğu düşünmüştür. Ardından sayılar üzerinde konuşulmaya başlandığında ise Ö1, sonsuzluğu bir bütün olarak ifade etmiş ve statik sonsuzluk düşüncesi göstermeye başlamıştır. Ö1 ile yapılan görüşme alıntısı aşağıda verilmiştir.

A: Sana göre sonsuzluk nedir? Örnek vererek açıklayabilir misin?

Ö1: Bana göre sonsuzluk sonu olmayan, sonu gelmeyen demektir.

A: Örnek verebilir misin?

Ö1: Mesela sayılar sonsuza kadar gidebilir.

A: Sayıların sonsuz olduğunu söyledin. Peki sence sonsuzluk bir sayı mıdır?

Ö1: Hayır. Sonsuz demek bütün sayılar demek... bir sayı... yani bir sayı sonsuz değildir çünkü bir tanedir. Sonsuz sayıdan oluşur sonsuzluk. Sonsuzluk sonsuz sayı gerektirir.

Matematiksel sonsuzluk kategorisinin diğer bir alt kategorisi ise “büyük sayılar” kategorisidir. Bu kategoride yer alan öğrenciler sonsuzluk tanımlarında, sonsuzluk için “çok büyük”, “çok fazla”, “en fazla” veya “çok büyük bir sayı” gibi ifadeleri kullanmışlardır ve sonsuzluğu temsil ettiğini düşündükleri büyük sayılar yazmışlardır. “Sonsuzluk en çok, en uzakta, en fazla demektir. Örnek; 9999.999.99.9”(5. sınıf) ve “Sonsuzluk belli miktarlar arasındaki miktarların olabildiğince çok olabilmesidir.”(8. sınıf) cevapları öğrenci cevaplarından birkaç tanesidir.

Öğrencilerin %24’ü matematiksel sonsuzluk kategorisinde yer almaktadır. Sınıf seviyelerine göre incelendiğinde ise en fazla 7.sınıf ve 8.sınıf öğrencilerinin bu kategoride yer aldığı görülmektedir. Diğer yandan öğrencilerin %31’i de sonsuzluk kelimesini tanımlarken herhangi bir örnek vermediği için ya da soruyu boş bırakmayı tercih ettiği için belirtilen kategorilere dâhil edilmemiştir ve sınıflandırma yapılamamıştır.

3.2. Üçten büyük sayılar

Bu soruda öğrencilere 3’ten büyük kaç tane sayı yazılabileceği sorulmuştur. Öğrencilerin cevapları ve yapmış olduğu açıklamalar doğrultusunda, “sonsuz”, “sınır belirtmemiş”, “sınırlı sayı” ve “sınıflandırılmayan” olmak üzere dört kategori oluşturulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyesine göre dağılımı ise Tablo 4’de sunulmuştur.

Tablo 4. İkinci soruya ilişkin kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	Sınıf Seviyesi											
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam			
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%		
Sonsuz	Dinamik sonsuzluk		7	14	10	25	8	18	15	36	40	23
	Statik sonsuzluk		20	40	25	62	23	52	19	45	87	49
Sınır Belirtilmemiş		3	6	2	5	4	9	4	9	13	8	
Sınırlı Sayı		17	34	3	8	8	18	4	10	32	18	
Sınıflandırılmayan		3	6	0	0	1	3	0	0	4	2	
Toplam		50		40		44		42		176	%100	

Üçten büyük sayılara “sonsuzdur” cevabı veren öğrenciler, yapmış oldukları açıklamalara göre dinamik sonsuzluk ve statik sonsuzluk şeklinde kategorize edilmiştir.

Daha sonra bu kategoriler “sonsuz” kategorisi adı altında toplanmıştır. Birinci soruda dinamik sonsuzluk kavramı, devam eden bir süreç olarak tanımlanmıştır. Kolar ve Cadez (2012) doğal sayıların 1, 2, 3, 4... şeklinde sayılmasının sonu ve son terimi belirlenemeyen sonsuz bir süreç olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle, sayıların devam ettiğini ve sonu olmadığı düşüncesini içeren öğrenci cevapları bu kategoriye dâhil edilmiştir. Öğrencilerin %23’ü bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye örnek olabilecek testteki bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

“Sonsuzdur çünkü bulabileceğimiz en büyük sayıyı yazsak ve ona bir eklediğimizde daha büyük bir sayı bulabiliriz.”(6. sınıf)

“ $3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$. Böyle devam eder çünkü sayılar sonsuzdur.” (5. sınıf)

“4’ten başlayıp sonsuza kadar gider.” (7. sınıf)

Öğrenci cevaplarından da görüldüğü üzere, bu kategoride yer alan öğrencilerin birçoğu, sayılara 1 ekleyerek devam edildiğinde sürekli daha büyük sayılar elde edileceğini ve bu işlemin sonsuza kadar devam ettirilebileceğini düşünmektedirler.

Statik sonsuzluk kategorisinde ise sonsuzluğun bir bütün olarak düşünülmesi söz konusudur. Bu nedenle “ ∞ ”, “sonsuz” ve “tüm sayılar” gibi cevaplar bu kategoriye dâhil edilmiştir. Öğrencilerin %49’u statik sonsuzluk kategorisinde yer almaktadır. Bu kategoriye örnek olabilecek bazı öğrenci cevapları şöyledir:

“Üçten büyük her sayı olur bu yüzden sonsuzdur.”(7. sınıf)

“Sonsuz, çünkü sayılar sonsuzdur.”(8. sınıf)

Bu kategoride yer alan 8. sınıf öğrencisi Ö13’ün görüşme esnasında düşüncelerini şu şekilde açıklamıştır

Sonsuzluk testindeki cevap: 3’ten büyük tüm reel sayılar yazılabilir.

A: Cevabını biraz daha açabilir misin?

Ö13: Burada 3’ü sayı doğrusunda düşünürsek 3’ün sağında olan bütün sayılar, bütün noktalar yazılabilir.

A: Peki sayı olarak örnek verebilir misin?

Ö13: 4, 5, 6, 7, 1 milyon, 2 milyon.

A: Peki bu sayıların hepsini sayabilir miyiz?

Ö13: Sayamayız. Çünkü sonsuzdur.

Ö13, 3’ten büyük yazılabilecek sayıların sonsuz olduğunu düşünmektedir. Bu düşüncesini ifade ederken, “bütün sayılar” ve “bütün noktalar” ifadelerini kullanması sonsuzluğu bir bütün olarak görme düşüncesini desteklediğini söyleyebiliriz.

Bu soruya ait bir diğer kategori ise “sınır belirtilmemiş” kategorisidir. Bu kategoride yer alan öğrenciler, 3'ten büyük kaç tane sayı yazılabileceği ile ilgili bir sayı belirtmemiştir veya sayıların üst sınırından bahsetmemiştir. Öğrencilerin %7'si soruyu bu şekilde cevaplandırmıştır. Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin cevapları şöyledir:

“Üçten büyük birçok sayı yazılabilir.” (6. sınıf)

“İstedığımız kadar sayı yazabiliriz.” (5. sınıf)

Diğer yandan öğrencilerin %18'i, 3'ten büyük sınırlı sayı yazılabileceğini düşünmektedir. Bu öğrenciler düşüncelerini tahmini bir sayı söyleyerek ya da sınır belirten ifadeler yazarak dile getirmişlerdir. Örneğin, 5. ve 6. sınıf öğrencilerinden iki tanesi, “999.999.999. Çünkü 3'ten büyük bir sürü rakam var.”(6. sınıf) ve “Nokta sayısınca sayı yazabilirim..5,6 tane vb...”(5. sınıf) şeklindeki cevaplar ile soruyu yanıtlamışlardır. Öğrencilerin %2'si ise cevaplarında "anlamadım", "bilmiyorum" gibi ifadeler yazdığı veya soruyu boş bırakmayı tercih ettiği için sınıflandıramayan kategorisine dâhil edilmiştir.

Sayılar bağlamında sorulan bu soruda, sınıf seviyelerine göre bakıldığında ise 5. sınıfların %54'ü, 6. sınıfların %87'si, 7. sınıfların %70'i ve 8. sınıfların %81'i benzer gerekçelerle, üçten büyük sayılar için yazılabilecek sayıların sonsuz olduğunu düşünmektedirler.

3.3. 0-1 aralığında kaç kesir vardır?

Bu soruda, öğrencilere 0 ile 1 arasında kaç tanesi kesir olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplar doğrultusunda "sonsuz", "sınırlı sayıda kesir", “belirsizlik”, “kesir yoktur” ve “sınıflandıramayan” şeklinde beş kategori oluşturulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyesine göre dağılımı ise Tablo5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Kategorilerin sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	Sınıf Seviyesi									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
<i>Dinamik sonsuzluk</i>	2	4	2	5	5	11	2	5	11	6
Sonsuz										
<i>Statik sonsuzluk</i>	12	24	11	28	11	25	24	57	58	33
<i>Sınırlı Sayıda Kesir</i>	18	36	9	22	15	34	3	7	45	26
<i>Belirsizlik</i>	1	2	6	15	4	9	3	7	14	8
<i>Kesir Yoktur</i>	7	14	4	10	5	11	1	3	17	10
<i>Sınıflandıramayan</i>	10	20	8	20	4	9	9	21	31	17
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin %39'unun bu soruya "sonsuz" cevabı verdiği görülmektedir. Sonsuzluk türüne bakıldığında ise öğrencilerin %6'sının dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip olduğu belirlenmiştir. Dinamik sonsuzluk düşüncesine sahip öğrenciler, genellikle sonsuz bölüm üzerinde durmuşlardır. Öğrenciler, kesirlerde bölme işlemlerinin devam ettiğini, işlemlerin sonsuza kadar yapılabileceğini ve bölüm sonunda yeni kesirler elde edileceğini ifade etmişlerdir. Bu kategoriye örnek bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

“Kesirleri sürekli bölebiliriz bu yüzden sonsuz kesir vardır.” (6. sınıf)

“Sonsuz tanedir. Çünkü sayıların sonu gelmez bunun için paydaya sonsuz tane sayı yazılabilir.” (7. sınıf)

Yapılan mülakatlarda da öğrencilerin birçoğu kesirlerin paydasına sonsuz sayı yazılabileceğini bu nedenle $[0,1]$ aralığındaki kesir sayısının da sonsuz olacağını söylemişlerdir. Örneğin, 8.sınıf öğrencisi Ö16 görüşmede neden sonsuz kesir yazılabileceği ile ilgili düşüncelerini şöyle açıklamıştır:

Sonsuzluk testindeki cevap: 0 ile 1 arasında olmak şartıyla sonsuz... yazamam ki. Kesirler de sonsuz değil midir aslında.

A: Cevabında 0 ile 1 arasında sonsuz kesir olduğunu söylemişsin. Bunu biraz daha açabilir misin?

Ö16: Burada kesirler giderek bölünüyor, $1/2$, $1/4$, $1/8$... gibi giderek küçülüyor onları sonsuza kadar götürebiliriz.

A: Anladım. Peki bu kesirleri yazabilir misin?

Ö16: Yazarım ama hepsini yazamam. $1/2$, $1/3$, $1/4$... böyle gidiyor. Sayılar sonsuz olduğu için alta yazabileceğimiz sayılar da sonsuz oluyor. O yüzden sonsuz.

Ö16, teste verdiği cevabında kesirlerin sonsuz olduğunu söylemiştir. Bu nedenle statik sonsuzluk kategorisine dâhil edilmiştir. Ancak mülakatta, kesirlerin kendi aralarında bölüm yapılabileceğini ve sonsuza kadar devam edeceğini söyleyerek dinamik sonsuzluk düşüncesi göstermiştir. Ö16'ya bu kesirleri yazıp yazamayacağı sorulduğunda ise sayılar sonsuz olduğu için kesir yazarken paydaya sonsuz tane sayı yazılabileceğini dolayısıyla kesirlerin de sonsuza kadar gideceğini ifade etmiştir. Bu kategoride yer alan diğer öğrencilerden de kesirleri yazmaları istendiğinde benzer şekilde öğrencilerin hepsi kesrin paydasına $1,2,3$... sayılarını yazarak, kesrin devam ettiğini ve kesirlerin tamamını yazamayacaklarını belirtmişlerdir.

Öğrencilerin %33'ü nün de statik sonsuzluk düşüncesine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu öğrenciler, yanıtlarında genellikle *“Kesirler de sayılar gibi sonsuzdur”* veya *“Sayılar sonsuz olduğu için kesirler de sonsuzdur”* şeklinde açıklama yaptıkları görülmüştür.

Öğrenci cevaplarından elde edilen bir diğer kategori ise sınırlı sayıda kesir kategorisi olup, bu kategoriye 0 ile 1 arasında sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünerek kesirlerin sayısı ile ilgili tahminde bulunan öğrencilerin cevapları dâhil edilmiştir. Bu kategoride yer alan öğrencilerin bir kısmı, on binlerce ya da katrilyon gibi büyük sayı miktarlarında kesir olduğunu söylerken, bir kısmı ise 2,50,100... vb. gibi belli sayıda kesir olduğunu söyleyerek 0 ile 1 arasında sınırlı sayıda kesir olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerin %26'sı sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünmektedir. Aşağıda bu kategoriye örnek olabilecek sonsuzluk testinden elde edilen bazı öğrenci cevapları verilmiştir.

“0 ile 1 arasında sınırlı ve küçük bir sayı dilimi vardır.” (7. sınıf)

“On binlerce kesir olabilir ama mutlaka bir sınırı vardır.” (8. sınıf)

“1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10'a kadar kesir yazılabilir.”(5.sınıf)

Öğrencilerin %8'i ise, 0 ile 1 arasındaki kesir sayısının bilinemeyeceğini söylemiş ve kaç kesir olduğunu belli olmadığını ifade etmişlerdir. Bu grupta yer alan öğrenciler çoğunlukla *“Çok kesir vardır”*, *“Ne kadar istersem o kadar kesir yazabilirim.”* veya *“0 ile 1 arasındaki eşit parçalara bağlıdır”* şeklinde açıklama yapmışlardır. Bu kategoriye örnek olabilecek iki öğrencinin cevabı şöyledir:

“0 ile 1 arasındaki eşit parçalara bağlıdır.” (7. sınıf)

“Belirli bir sayı yok. Çünkü parça birçok sayıya bölünebilir.” (6. sınıf)

Öğrencilerin %10'u ise 0 ile 1 arasında kesir olmadığını söylemiştir. Öğrencilerin %17'si ise "anlamadım", "bilmiyorum" gibi cevaplar verdiği için ya da soruyu boş bırakmayı tercih ettiği için sınıflandırılmayan kategorisine dâhil edilmiştir.

Öğrencilerin cevapları sınıf bazında incelendiğinde ise 5. sınıfların birçoğu (% 36) [0,1] sınırlı sayıda kesir olduğunu düşünürken, 6.sınıfların %33'ü, 7. sınıfların %36'sı ve 8. sınıfların %62'si ise [0,1] aralığındaki kesir sayısının sonsuz olduğunu düşünmektedir.

3.4. En büyük sayı var mıdır?

Bu soruda öğrencilere *“En büyük sayı var mıdır?”* şeklinde bir soru sorulmuş ve cevaplarını nedenleri ile açıklamaları istenmiştir. Öğrencilerin cevapları doğrultusunda, *“en büyük sayı sonsuzdur”*, *“büyük sayı”*, *“en büyük sayı bilinemez”*, *“en büyük sayı yoktur”* ve *“sınıflandırılmayan”* olmak üzere 5 kategori oluşturulmuştur. Kategorilerin, öğrencilerin sınıf seviyesine göre dağılımı ise Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6: Beşinci soruya ilişkin kategorilerin, sınıf seviyelerine göre dağılımı

Kategoriler	Sınıf Seviyesi									
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
<i>En büyük sayı sonsuzdur</i>	12	24	11	27	10	23	6	14	39	22
<i>Büyük sayı</i>	10	20	3	8	4	9	4	10	21	12
<i>En büyük sayı bilinemez</i>	6	12	15	38	5	11	9	21	35	20
<i>En büyük sayı yoktur</i>	18	36	9	22	20	46	21	50	68	39
<i>Sınıflandırılmayan</i>	4	8	2	5	5	11	2	5	13	7
Toplam	50		40		44		42		176	% 100

Öğrencilerin %22'si en büyük sayının “sonsuz” olduğunu söylemiştir. Sonsuzdur cevabını veren öğrenciler genellikle, “*sonsuz sayı. ör: 99.....*” veya “*sayılar sonsuzdur*” şeklinde açıklama yaptıkları görülmüştür. Bu kategoriye örnek olabilecek testteki bazı öğrenci cevapları şu şekildedir:

“En büyük sayı sonsuzdur. Çünkü sayılar sonsuzdur saydıka bitmez.” (7. sınıf)

“En büyük sayı sonsuz olan bir sayı çünkü hem en son o sayı geliyor, hem de en büyük sayı odur.” (5. sınıf)

“En büyük sayı sonsuzdur. Çünkü bilim adamları sonsuzluğu böyle açıklar.” (6. sınıf)

Öğrencilerin %12'ı ise en büyük sayı için bir sayı tahmininde bulunarak, en büyük sayıyı temsil ettiğini düşündüğü büyük sayılar yazmıştır. Bu bağlamda, öğrenciler en büyük sayıya yönelik genellikle *99999999, 1000, 100, pi sayısı, yüz kentrilyon vb.* gibi sayılar yazmışlardır. Ancak öğrencilerin çoğunun “9” sayısını arka arkaya yazarak en büyük sayıya ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu kategoride yer alan testteki bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

“Pi sayısıdır çünkü bir dergide okumuştum”. (5. sınıf)

“En büyük sayı 0'dan 10'a kadar oluşturulan büyük sayıya denir.” (5. sınıf)

“Bence en büyük sayı 99999999'dur. Ben bunu basamak değerlerini sayarak buldum.” (6. sınıf)

Bu soruya verilen diğer bir cevap ise “en büyük sayı bilinmez” cevabı olup, öğrencilerin %20’si bu cevabı vermiştir. Öğrenciler en büyük sayının bilinmeyeceğini söylerken, genellikle neden olarak sayıların sonu olmadığını, sonsuza kadar devam ettiğini ve her sayının daha büyüğünün yazılabileceğini söylemişlerdir. Bu kategoride yer alan öğrenciler farklı gerekçeler ile en büyük sayının bilinmeyeceğini söylemiş ancak en büyük sayı var mıdır yok mudur bununla ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır. Bu kategoride yer alan bazı öğrencilerin cevapları ise şu şekildedir:

“En büyük sayı bilinemez çünkü sayıların sonu yoktur.”(6. sınıf)

“En büyük sayı bilinemez çünkü sayılar sonsuza kadar devam eder.”(5. sınıf)

“En büyük sayı bilinemez çünkü her sayıyı yan yana getirince bir sürü sayı oluşur.”(7. sınıf)

Öğrencilerin %39’su ise en büyük sayının olmadığını ifade etmiştir. Bu öğrenciler, en büyük sayının olmadığını söylerken genel olarak, sayılar sonsuz olduğu için en büyük sayının olmadığını veya her sayıdan daha büyük bir sayı olduğu için en büyük sayının olmadığı şeklinde gerekçelerini belirtmişlerdir. Bu kategoride yer alan bazı öğrenci cevapları aşağıda verilmiştir.

“En büyük sayı yoktur. Düşündüğünüz en büyük sayının bir fazlası ondan daha büyüktür.”(5. sınıf)

“En büyük sayı diye bir şey yoktur. Büyük sayı vardır. Sayıların sonsuzluğu en büyük kavramını yok saymaktadır.”(7. sınıf)

“En büyük sayı yoktur. Sonsuz sayıda reel sayı vardır. Bence sonsuz sayı diye bir şey yoktur.”(8. sınıf)

En büyük sayının olmadığını düşünen 7. sınıf öğrencisi Ö12 ile yapılan görüşmede, Ö12 belli bir yere kadar en büyük sayının yazılabileceğini ancak sonrasında en büyük sayının olmadığını söylemiştir. Ö12 düşüncelerini şöyle dile getirmiştir:

Sonsuzluk testindeki cevap: En büyük sayı yoktur daha doğrusu yazamayız.

A:Burada, “en büyük sayı yoktur daha doğrusu yazamayız” şeklinde ifade etmişsin. Cevabını biraz daha açabilir misin?

Ö12:Bence belirli bir yere kadar en büyük sayı vardır ondan sonrası da vardır ama yazamayız.

A:Belirli bir yer derken ne demek istedin?

Ö12:Mesela trilyona kadar var diyelim ondan sonra da vardır ama biz bilmiyoruz ama sonsuz olduğunu biliyoruz ama ondan sonrasını yazamıyoruz diyelim.

A: Peki en büyük sayı var mıdır sence?

Ö12: En büyük sayı yoktur.

Öğrencilere göre sayıların artarak devam ediyor olması her sayının daha büyüğü olacağı anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu anlayış öğrencileri en büyük sayının

olmadığı sonucuna götürmektedir. Ayrıca öğrencilere göre sayıların sonsuz olması da en büyük sayının olamayacağına bir işaretir ve bu işaret öğrencileri "en büyük sayı yoktur" düşüncesine götürmektedir.

Öğrencilerin %7'si ise sınıflandırılmayan kategorisinde yer almıştır. Diğer yandan öğrenci cevaplarına sınıf bazında bakıldığında 5. sınıfların %36'sı, 7. sınıfların %46'sı ve 8. sınıfların %50'si en büyük sayının olmadığını söylemiştir. 6.sınıf öğrencileri (%38) ise genellikle en büyük sayının bilinmeyeceğini söylemişlerdir.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma ile 5., 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğrencilere sonsuzluktan ne anladıkları sorulmuştur.

Öğrencilerin birinci soruda sonsuzluk kavramına ilişkin verdikleri cevaplar incelendiğinde öğrencilerin sonsuzluğu uzay, evren, ufuk çizgisi gibi örnekler üzerinden tanımlaması öğrencilerin daha çok fiziksel sonsuzluk algısına sahip olduğunu göstermektedir. Buradan, öğrencilerin sonsuzlukla ilgili gerçek hayattan geliştirdikleri sezgilerinin var olduğu görülmektedir. Ayrıca, öğrencilerin, sonsuzluğu tanımlarken verdiği özgürlük, sevgi, mutluluk, aşk, ölüm, gökyüzü, kum tanecikleri gibi örnekler de bu çıkarımı desteklemektedir. Yapılan çalışmalar (Çelik ve Akşan, 2013; Kim, Sfarid & Ferrini-Mundy, 2005; Maria ve ark., 2009, Singer & Voica, 2008) göz önüne alındığında da öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarının günlük yaşamdan önemli derecede etkilendiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu sezgilerine paralel olarak matematiksel sonsuzluk düşüncelerinin de var olduğu görülmektedir. Yukarıda verilen örneklerle ek olarak öğrencilerin sayılar, doğru parçası, doğru gibi örnekler vermesi öğrencilerde matematiksel sonsuzluğun gelişmeye başladığına dair ipuçları vermektedir.

En büyük sayı ile ilgili soruda öğrencilerin çoğunluğu (%39) en büyük sayının olmadığını söylemiştir. Bu öğrenciler sayıların sonsuz olmasından dolayı en büyük sayının olmayacağını düşünürken, diğer yandan en büyük sayının sonsuz olduğunu söyleyen öğrencilerin sayısı (%22) da dikkate değerdir. Bu öğrenciler ise en büyük sayı olarak "sonsuz"u kabul ederken, öğretmenlerini, eski öğrenmelerini ya da dışsal kaynakları referans göstermişlerdir. Örneğin, "*En büyük sayı sonsuzdur, çünkü bilim adamları sonsuzluğu böyle açıklar*" söylemi böyle bir sonucun göstergesi olarak örnek verilebilir. Sierpinska (1987), sonsuzluk kavramının birçok öğrenciye basitçe en büyük sayı olarak öğretildiğini belirtmiştir. Dolayısıyla öğrenciler bu öğrenmelerini devam ettirmekte ve bu durum ileriki zamanlarda kavram ile ilgili yanlış öğrenme veya zorluk olarak ortaya çıkabilmektedir.

Çalışmadan elde edilen bir diğer sonuç, 3'ten büyük sayılar için sonsuz cevabını veren öğrenci sayısının (%72), [0,1] aralığındaki kesir sayısına sonsuz diyen öğrenci sayısından (%40) fazla olduğunu göstermektedir. Buna karşılık [0,1] aralığındaki kesir sayısının sınırlı olduğunu söyleyen öğrenci sayısı (%26), üçten büyük yazılabilecek sayıların sınırlı

olduğunu söyleyen öğrenci sayısından (%18) daha fazla olduğu görülmektedir. Bir başka ifadeyle, üçten büyük sayılara sonsuz diyen öğrenci sayısının, sınırlı bir aralıktaki kesir sayısına sonsuz diyen öğrenci sayısından fazla olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonucun iki olası açıklaması verilebilir. Birincisi, doğal sayı, kesir, rasyonel sayı ve reel sayıların öğretim programındaki sıralaması ile ilgilidir. Öğrenciler birinci sınıftan itibaren doğal sayı ve kesir kavramlarını öğrenmektedirler (MEB, 2005a). Fakat rasyonel sayılar bir sayı kümesi olarak ancak 7. sınıfta ve irrasyonel sayılar ise bir sayı kümesi olarak 8. sınıfta öğretilmektedir (MEB, 2005b). Bu sıralamanın doğal sonucu olarak öğrencilerin $[0,1]$ aralığındaki kesir sayısının sonsuzluğunu ortaokulun sonuna doğru anlaması beklenen bir sonuçtur. Bir başka deyişle, sınırlı bir aralıkta sonsuz elemanın olabileceği fikrinin anlaşılması ancak rasyonel ve reel sayılar kümesi öğrenildikten sonra daha olası görülmektedir. Fakat öğrencilerin reel sayıların kümesini formal olarak öğrenmesi sınırlı aralıkta sonsuz eleman olma fikrinin gelişmesini garanti etmeyebilir. Burada, elde edilen bulgunun ikinci açıklaması olarak, öğrencilerin sonsuzluğa dair geliştirdiği sezgiler devreye girmektedir. Öğrencilerin $[0,1]$ aralığında sınırlı sayıda kesir olduğunu söylemelerinin önemli gerekçelerinden bir tanesi de “0 ile 1 arası sınırlıdır” şeklindedir. Bir başka deyişle, öğrencilerin aralığın sınırlı olmasından dolayı sonlu sayıda kesir yazılabileceğini düşündüğü söylenebilir. Bu sonuç (Boero ve ark., 2003; Pehkonen ve ark., 2006; Singer & Voica, 2003) çalışmalarından elde edilen sonuçlarla da paralellik göstermektedir. Benzer bir şekilde, Singer ve Voica (2003), sonlu ve sonsuz kavramları ile ilgili öğrencilerin “sonlu, belirli sınırları vardır” ve “sonsuzun sınırı yoktur” şeklinde belli düşüncelere sahip olduğunu ifade etmiştir. Doğal sayıların devam ediyor olması ve bir sınırı olmaması öğrencilerdeki bu sonsuzluk kavrayışı ile uyuşurken, sınırları belli bir aralıkta sonsuz kesir olmasında durum ile uyuşmamaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin, sonsuzluğun belli noktalarla sınırlandırılmasına anlam vermekte zorlandıkları söylenebilir. Özmantar (2010), bu tür bir düşüncenin öğrencilerin birincil sezgilerinden kaynaklanan zorluk olabileceğini belirtmiştir. Bu tür bir kavram zorluğunun, sonsuzluğun sürekli artması ve daha da büyümesi gerektiği sezgisi ile tutarlı olduğunu ve neredeyse öğrencilerin hepsinde karşılaşılabilen sezgisel bilgi olduğunu ifade etmiştir.

Singer ve Voica (2008), sayma işleminin öğrencilerin doğal sayılar kümesini bir dizi gibi görmelerini sağladığını ve böylece öğrencilerin istedikleri kadar sayma işlemi yaparak devam edebilecekleri düşüncesini geliştirdiğini savunmaktadır. Böylece sayma işlemi “her sayıdan daha büyük bir sayı vardır” sezgisini destekleyerek, öğrencileri en büyük sayının olmadığı sonucuna götürmektedir. Öğrencilerin, sayma deneyimleri potansiyel sonsuzluk düşüncesinin gelişmesine katkıda bulunmaktadır. Bu deneyim sürekli bölme işlemi vasıtasıyla kesir ve rasyonel sayıların sonsuzluğu düşüncesinin geliştirilmesi için kullanılabilir. Örneğin, 3. sınıftan itibaren sayı doğrusu üzerinde farklı aralıklar vererek bu aralıkları sürekli 2'ye, 3'e veya değişen miktarlardaki aralıklara bölerek, $1/2$, $1/4$, $1/8$,... ya da $1/3$, $1/9$, $1/27$,... ya da $1/2$, $1/3$, $1/4$,... şeklinde diziler oluşturulması sağlanabilir. Ortaya çıkan dizilerin eleman sayısı hakkında etkinlikler yaparak sınırlı bir aralıkta sonsuz eleman olabileceği sezgisi geliştirilebilir.

Öğrencilerin sonsuzluk kavrayışlarında hiyerarşik olarak büyük sayılar, dinamik sonsuzluk ve statik sonsuzluk olarak bir sıralama gözlemlenmiştir. Büyük sayılar

seviyesindeki bir öğrencinin sonsuzluğu büyük sayılar ile ilişkilendirdiği hatta bazı öğrencilerin sonsuzluğu büyük sayı olarak tanımladığı görülmüştür. Özellikle 5. sınıf öğrencilerinin çoğunlukla bu seviyede olduğu söylenebilir. Dinamik sonsuzluk seviyesindeki bir öğrenci ise sonsuzluğu devam eden, bitmeyen bir süreç olarak görmektedir. Statik sonsuzluk seviyesi ise sıralamanın en üst seviyesi olup, bu seviyede olan öğrenciler sonsuzluğu bir bütün olarak görmektedir. Sayılar bağlamında sorulan 3. ve 4. sorulardan elde edilen bulgulara bakıldığında, öğrencilerde statik sonsuzluk düşüncesinin daha fazla olduğu görülmektedir. Bu sonuç Tall'un (1980) varsayımı ile paralellik göstermektedir. Tall, birçok çocukta potansiyel sonsuzlukla ilgili olan birincil sezgilerin olmasına rağmen, alınan eğitimin öğrencilerde, sonsuz kümelerde fiili sonsuzluk ile ilgili ikincil sezgilerini desteklediğini ifade etmiştir. Sayı bağlamında yaptığı çalışmalarında, benzer sonuçlar elde eden Kolar ve Cadez (2012), öğrencilerde potansiyel ve fiili sonsuzluk ile ilgili düşünme süreçlerini alınan eğitim ile ilişkilendirmiştir.

Middle School Students' Conceptions of Infinity

Extended Abstract

Infinity has an important place in the history of mathematics. It has been both inspiration and challenge for mathematicians for many years. Similarly, infinity has an important place in the children's mathematical development. It is also a difficult topic for today's children. Previous studies showed that both before and after formal education, children have some ideas about the concept of infinity. Students' intuitive ideas related to infinity might not be clear and may vary depending on the context (Fischbein et al., 1979; Jirotkova & Littler, 2008). It was contended that these intuitions can be uncovered with purposeful discussions (Singer, 2002; Singer & Voica, 2003). Revealing how middle school students interpret the concept of infinity is important to understand nature of these ideas. Identifying students' intuitions at early age, may offer mathematics educators some clues about what kinds of tasks and discussions can be used in the classroom so that more sound concept of infinity can be built on these ideas.

The purpose of this study was to investigate middle school students' understanding of infinity. The sample of the study consisted of 176 students from three middle schools. To explore students' conceptions of infinity, a test including four open-ended questions was administered. The test consisted of two parts. In the first part, students were asked to define the concept of infinity in their own words and explain it with an example. The purpose of this question was to reveal students' perceptions about infinity. Remaining three questions specifically addressed students' understanding of the topic in the context of numbers. While the first question was about students' perceptions of infinity in general, remaining three questions were specifically used to investigate students' conceptions of infinity from a mathematical perspective. The test was administered to students by the first researcher and it lasted about one hour. Following the test, interviews with 16 students, four from each grade, were conducted to produce rich data related to students' understandings of infinity. The data were analyzed through qualitative content analysis method. A coding scheme with categories and sub-categories were constructed based on the participants' responses to the test questions. The same method was utilized to analyze the data collected through clinical interviews.

Results of the study revealed that the participants mainly described the infinity as "having no end", "continuing" and "never-ending" and mainly perceived infinity "as a process that never ends". Specifically, students' answers to the first questions were categorized under three different headings, namely mathematical, physical and affective. Students' descriptions for infinity (e.g. horizon line, space, and universe) showed that students have physical perception of infinity. This result showed that students' intuitions about infinity has a ground in the real life context. Previous research studies (Çelik & Akşan, 2013; Kim, Sfard & Ferrini-Mundy, 2005; Maria et al., 2009, Singer & Voica, 2008) have suggested that student's first perceptions about infinity was greatly affected from their real life.

One of the questions asked in the context of numbers was related to the existence of the greatest number. For this question, the majority of students (39%) stated that there is no largest number. Students justified the non-existence of the largest number with the fact that numbers are infinite. On the other hand, the number of students who said that the largest number is infinity (22%) are also noteworthy. Students' conceptions of 'infinity as the largest number' may obscure the development of a sound understanding of the concept. Therefore teachers might need to consider 'infinity as the largest number' conception when designing instruction.

Another result obtained from this research showed the number of students (72%), who thought that numbers larger than 3 are endless, are higher than the number of student (% 40) who believed that the numbers of fractions in the interval $[0,1]$ are infinite. Similarly, the number of students (%26), who believed that there is a limited number of fractions in $[0,1]$, is more than the number of students (%18) who believed that there are limited numbers larger than 3. That is to say, the number of students who were thinking that there are infinitely many numbers larger than 3 was more than the number of those thinking that there are infinitely many fractions within the interval $[0,1]$. This result might showed that it is easier for children to understand the endlessness of numbers because it is consistent with the intuition of infinity as a never ending process. On the other hand, existence of infinitely many fractions in a bounded interval is inconsistent with this intuition.

In this study, a hierarchical understanding of students about infinity has been observed as large numbers, dynamic and static infinity. Students who are limited to the level of large numbers, associated infinity with large numbers and even some of the students identified infinity as a specific big number. Most of the 5th grade students were classified in this level. Students limited to the level of dynamic infinity perceive infinity as a process which is "continuing" and "never ending". On the other hand, the static infinity understanding is the highest level and students limited to this level perceive infinity as a whole. Looking at the questions in the context of numbers, especially questions 3 and 4, it is seen that an important portion of students have static infinity idea.

Kaynaklar/References

- Allen, G. D. (2000). *The history of infinity*. Retrieved from <http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/infinity.pdf>.
- Aztekin, S. (2008). *Farklı yaş gruplarındaki öğrencilerde yapılanmış sonsuzluk kavramlarının araştırılması* (Doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bölümleri Enstitüsü, Ankara.
- Boero, P., Douek, N., & Garuti, R. (2003). *Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context*. Paper session presented at the meeting of Proceedings of PME27, Honolulu, ABD.
- Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 166-190. <http://www.nef.balikesir.edu.tr/~dergi/> adresinden edinilmiştir.
- Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.
- Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F., & Ben Simon, K. (1986). *How do children cope with the infinity of numbers?* Paper session presented at the meeting of Proceedings of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, London, England.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10(1), 3-40.
- Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 309-329.
- Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 65 -73.
- Hauchart, C., & Rouche, N. (1987). *Apprivoiser l'Infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. Belgium: GEM, CiacoEditeur.
- İşleyen, T. (2013). Ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk algıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21(3), 1235-1252.
- Jirotková, D., & Littler, G. (2004). *Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context*. Paper session presented at the meeting of Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.
- Kim, D. J., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' colloquial and mathematical discourses on infinity and limit. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 201-208. Retrieved from <http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3KimEtAl.pdf>
- Kolar, V. M., & Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 389-412. Retrieved from <http://www.springer.com/gp/>

- Littler, G., & Jirotková, D. (2008). Highlighting the learning processes. In A. Cockburn, & G. Littler (Eds.), *Mathematical misconceptions: A guide for primary teachers*. (pp. 101-123). London: SAGE Publications Ltd. doi: <http://dx.doi.org/10.4135/9781446269121.n8>
- Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991) The conceptual evolution of actual infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211 – 231. Retrieved from <http://www.springer.com/gp/>
- Maria, K., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2009). *Teachers' perceptions about infinity: a processor an object?*. Paper session presented at the meeting of Proceedings of CERME 6, Lyon, France.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005a). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005b). *İlköğretim matematik dersi 1-5 sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Narlı, S. ve Narlı, P. (2013). Sonsuz sayı kümeleri ışığında ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk algı ve yanlışlarının belirlenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33, 122-133.
- Nunez, R. (1993). *Psychocognitive aspects underlying the concept of infinity in mathematics*. Fribourg, Switzerland: University Press.
- Özmantar, F. (2010). Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri* içinde (s. 151-180). Ankara: Pegem Akademi.
- Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 345. Retrieved from <http://www.emis.de/proceedings/PME30/4/345.pdf>
- Petty, J. A. (1996). *The role of reflective abstraction in the conceptualization of infinity and infinite processes* (Doctoral dissertation). Purdue University, West Lafayette, ABD. Retrieved from <http://docs.lib.purdue.edu/dissertations/AAI9725604/>
- Sacristan, A. I. (1997). *Windows on the infinite: Creating meanings in a logo-based microworld* (Unpublished doctoral dissertation). University of London, Institute of Education, UK.
- Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Singer, M. (2002). *New ways of developing mathematical abilities*. Paper presented at the meeting of Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK.
- Singer, M., & Voica, C. (2003). *Perception of infinity: does it really help in problem solving*. Paper presented at the meeting of Proceedings of the International Conference “The Decidable and the Undecidable in Mathematical Education”, Brno, Czech Republic.

- Singer, M., & Voica, C. (2007). *Children's perceptions on infinity: could they be structured?*. Paper presented at the meeting of Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.
- Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 188-205.
- Tall, D. O. (1980). *Mathematical intuition, with special reference to limiting processes*. Paper presented at the meeting of Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, California.

Kaynak Gösterme

Bozkuş, F., Toluk-Uçar, Z. ve Çetin, İ. (2015). Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluğu kavrayışları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 506-531.

Citation Information

Bozkuş, F., Toluk-Uçar, Z., & Çetin, İ. (2015). Middle school students' conceptions of infinity. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(3), 506-531.