

Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının Reel Sayıları Kavrayışlarında Temsillerin Rolü

The Role Of Representations In Middle School Preservice Teachers' Conceptions Of Real Numbers

Zülbiye TOLUK UÇAR

Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı, Bolu

Makalenin Geliş Tarihi : 17.02.2015

Yayına Kabul Tarihi: 03.08.2015

Özet

Bu araştırmanın amacı 158 ortaokul matematik öğretmen adayının reel sayıları kavrayışlarında temsil türlerinin rolünü incelemektir. Şeffaf ve opak temsiller ayrımı kuramsal çerçeve olarak kullanılmıştır. Öğretmen adaylarından rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlamaları, reel sayıları alt kümeleri ile birlikte şema ile göstermeleri ve verilen sayıların türlerini (rasyonel ve irrasyonel) belirlemeleri istenmiştir. Daha sonra 10 gönüllü öğretmen adayıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının sayıların şeffaf temsillerinde bile (örneğin, $1/3$) sayının rasyonel ya da irrasyonel olduğunu belirlemede zorlandıklarını göstermiştir. Ayrıca, öğretmen adayları genellikle sayıları rasyonel ya da irrasyonel olduğunu belirlerken temsil biçimlerinden etkilenmiş ve temsile göre sayının türünün değiştiğini düşünmüştür.

Anahtar Kelimeler: reel sayılar, irrasyonel sayılar, rasyonel sayılar, temsiller, ortaokul matematik öğretmen adayları

Abstract

The purpose of this study was to investigate the role of the representations in 158 middle school preservice teachers' conceptions of real numbers. The distinction of the transparent and opaque representations was used as a theoretical framework. Participants were asked to define rational and irrational numbers, to show real numbers system in a diagram and to identify the type of the given numbers. Moreover, 10 preservice teachers were interviewed. The results showed that participants had difficulty in determining whether a number is rational or irrational even in case of transparent representation (i.e. $1/3$). In addition, participants' responses were significantly influenced by the type of representations and some believed that as the representation change, so was the number.

Keywords: real numbers, rational numbers, irrational numbers, representations, middle school preservice teachers.

1. Giriş

Öğrencilerin reel sayıları anlaması lise ve üniversitedeki matematik derslerindeki başarıları için oldukça önemlidir. Reel sayıları oluşturan sayı sistemleri göz önüne alındığında, öğrenciler sırayla ilkokulda önce doğal sayı ve kesirleri, ortaokulda ise tam sayı ve rasyonel sayıları öğrenirler. Ortaokulun son yılında ise, irrasyonel sayı kavramının tanıtılmasıyla birlikte öğrencilerin bu sayı sistemlerini bir araya getirerek reel sayı sistemini oluşturmaları ve anlamaları beklenir. Özellikle, irrasyonel sayı kavramının anlaşılması, öğrencilerin sayı kavramlarını rasyonel sayılardan reel sayılara genişletmeleri için elzemdir (Sirotic ve Zaskis, 2007a). Fakat yapılan araştırmalar öğretmen ve öğrencilerin rasyonel ve irrasyonel sayıları anlamalarında yetersizliklerin olduğunu ortaya koymuştur (Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995; Kara ve Delice, 2012; Sirotic ve Zaskis, 2007a, 2007b; Temel ve Eroğlu, 2014; Tirosh ve diğ., 1998;). Tirosh ve diğ. (1998) öğretmen adaylarının sayı kavrayışlarını çoğunlukla doğal sayılarla edindikleri deneyimlerine dayandırdıklarını tespit etmiştir. Ayrıca, Fischbein, Jehiam ve Cohen (1995) birçok lise öğrencisi ve lise öğretmen adayının herhangi bir sayının rasyonel, irrasyonel ya da reel sayı olduğunu dahi doğru belirlemediğini ortaya koymuştur.

Rasyonel ve irrasyonel sayılar üzerine yapılan araştırmalar öğretmen, öğretmen adayları ve öğrencilerin (Kara ve Delice, 2012; Peled ve Hershkovitz, 1999; Sirotic ve Zaskis, 2007a, 2007b) bir reel sayıyı rasyonel ya da irrasyonel olarak belirlerken sayıların temsillerinden etkilendiğini ortaya koymuştur. Örneğin, Peled ve Hershkovitz (1999), öğretmen adaylarının irrasyonel sayıları doğru tanımlamalarına rağmen farklı temsil biçimlerini esnek bir şekilde kullanamadıklarını bulmuşlardır. Arcavi ve diğ. (1987) lise matematik öğretmenlerinin genelde irrasyonel sayıların ondalık temsillere sahip olduğuna inandığını ve verilen sayıların rasyonel ya da irrasyonel olduğuna karar veremediğini belirlemişlerdir. Benzer şekilde Sirotic ve Zaskis (2007a) lise matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayıları açıklarken çoğunlukla ondalık temsillere odaklandıklarını ortaya çıkarmıştır. Başka bir çalışmada Sirotic ve Zaskis (2007b) lise matematik öğretmeni adaylarının irrasyonel sayıları sayı doğrusunda nokta olarak temsil ederken irrasyonel sayıları, ondalık temsillerinin yaklaşık değerlerini alarak yani bir rasyonel sayı gibi düşünerek hareket ettiklerini bulmuştur. Özetle, bu araştırmalara göre, temsiller rasyonel ve irrasyonel sayı kavramlarının anlaşılmasında önemli bir yer tutmaktadır. Bu bağlamda bu çalışmada kuramsal çerçeve olarak Lesh, Behr ve Post (1987) tarafından ortaya atılan şeffaf (transparent) ve opak (opaque) temsil ayrımı kullanılmıştır.

Şeffaf ve Opak Temsiller

Temsiller, matematik kavramlarının öğrenilmesinde büyük önem taşır. Temsiller, öğrencilerin içsel olarak kavramsallaştırdıklarını dışsal olarak sunmasını sağlayan somut yapılarıdır (Lesh, Post ve Behr, 1987). Lesh ve diğ.'ne göre öğrencinin bir kavrama ait temsil biçimleri arasında geçiş yapabilmesi, o kavramı anladığının bir göstergesidir. Temsillerin kavramsal anlama için önemli bir araç olduğu görüşü birçok matematik eğitimcisi tarafından da kabul edilmektedir (Cuoco, 2001; Lesh ve diğ., 1987; Zaskis ve Sirotic, 2010).

Lesh ve diğ. (1987) temsil biçimleri arasında şeffaf ve opak ayrımını ortaya atmıştır. Şeffaf bir temsil, temsil edilen kavram ya da yapının anlamını açıkça ortaya koyar. Opak

temsil ise bu kavram ve yapıların bazı yönlerini gözler önüne sererken bazı yönlerini ise gizler. Zaskis ve Gadowsky'e (2001) göre aslında sayıların tüm temsil biçimleri bir anlamda opaktır. Bir başka deyişle temsiller sayıların bazı özelliklerini gözler önüne sererken bazı özelliklerini de gizlerler. Örneğin, 784 sayısının 28^2 şeklindeki temsili sayının tam kare olduğunu şeffaf biçimde göstermektedir, fakat 98'in katı olduğu gerçeğini de gizlemektedir. Zaskis and Liljedahl (2004) şeffaf ve opak temsiller ayrımını öğretmen adaylarının asal sayıları kavrayışlarına uygulamışlardır. Asal sayıların şeffaf bir temsil biçiminin olmamasını öğretmen adaylarının bu sayılarla yaşadığı güçlüklerin bir nedeni olarak göstermişlerdir.

Reel sayılar göz önüne alındığında, Zaskis ve Sirotic (2010) irrasyonel sayıların temsillerini şeffaflık ve opaklık açısından incelemişlerdir. Zaskis ve Sirotic'e göre tanım itibarıyla rasyonel sayıların şeffaf temsili a/b şeklindeki temsildir ve bu temsil sorgusuz kabul edilmektedir. İrrasyonel sayılar, rasyonel sayılara göre tanımlandığı için, iki tam sayının bölümü şeklinde temsil edilemeyen sayılar şeklinde tanıtılmaktadır. Buradan, irrasyonel sayıların temsillerinin, rasyonel sayıların temsiline göre belirlendiği ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, irrasyonel sayıların anlaşılmasının rasyonel sayıların anlaşılmasına dayandığı ileri sürülebilir. Zaskis ve Sirotic'e göre irrasyonel sayıların alternatif temsili sonsuza kadar devirsiz ilerleyen ondalık sayılardır. Kara ve Delice (2012) irrasyonel sayılar için sonsuza kadar devirsiz ilerleyen ondalık sayı temsili, rasyonel olmayan sayı temsiline göre daha anlaşılır olduğunu ileri sürmüştür.

Rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillerinin varlığı bu kavramların anlaşılmasını zorlaştırmaktadır. Sinclair, Liljedahl ve Zaskis (2006) rasyonel sayıların kesir ve ondalık gösterimlerinin farklı görünmesine rağmen aynı sayıyı yani bir rasyonel sayıyı temsil ettiğini anlamak için öğrencinin fazladan bilişsel çaba göstermesini gerektirdiğini belirtmektedir. Ayrıca Sinclair, Liljedahl ve Zaskis kesirlerin ondalık temsillerinin $2/3=0.6667$ örneğinde olduğu gibi yuvarlanmasının, öğrencilerin kesirlerin bir sayı olduğu ve ondalık temsillerine eşit olduğu gerçeğini görmelerini engelleyebileceğini öne sürmüşlerdir. Benzer şekilde, Vamvakoussi ve Vosniadou (2010) rasyonel sayıların anlaşılmasında iki önemli kavramsal zorluğun bulunduğunu iddia etmektedir: Bunlar doğal sayılarla ilgili bilgiler ve rasyonel sayıların temsillerinin çeşitliliğidir. Vamvakoussi ve Vosniadou'ya göre, öğrencilerin farklı temsillerin aynı sayıyı gösterdiğini fark edememesi bir kavramsal zorluk oluşturmaktadır.

Öğrencilerin reel sayı kavramı ile ilk kez ortaokulda karşılaştığı göz önüne alındığında ortaokul öğretmen adaylarının bu sayıya dair düşüncelerinin incelenmesine ihtiyaç vardır. Ayrıca, öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlemedeki başarılarında temsil türlerinin rolünü inceleyen çalışmalar yeterli düzeyde değildir. Var olan çalışmalar (Zaskis ve Sirotic, 2010) ise lise öğretmen adayları ile yapılmış olan nitel çalışmalardır. Bu araştırmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının genelde reel sayıları, özelde ise rasyonel ve irrasyonel sayıları kavrayışlarının sayıların temsil biçimlerinin şeffaf ve opak olmasına göre nasıl etkilendiğini ortaya koymaktır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır;

- 1.Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayıları rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlemedeki başarıları temsil biçimlerine, temsillerin şeffaf ve opak olmasına göre farklılık göstermekte midir?

2.Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayılara (rasyonel ve irrasyonel) ilişkin kavrayışları nelerdir?

2. Yöntem

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayıları kavrayışlarında temsillerin rolünü derinlemesine incelemek amacıyla nicel ve nitel tekniklerin birlikte kullanıldığı açıklayıcı karma araştırma modeli kullanılmıştır. Açıklayıcı karma araştırma modelinde önce nicel veriler toplanır, daha sonra nicel verileri açıklamak için nitel veriler toplanır (Creswell, 2008). Creswell'e göre karma yöntem araştırmaları, nitel ve nicel araştırma yöntemlerinin birlikte kullanılması nedeniyle araştırma sorularının daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır. Bu çalışma sürecinde de araştırmacı tarafından hazırlanan bir test ve yarı-yapılandırılmış görüşme aracılığıyla araştırmaya katılan ortaokul öğretmen adaylarının reel sayılarla ilgili kavrayışlarının temsil türlerine göre ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Temsil türlerinin rolünü ayrıntılı ve derinlemesine incelemek için gönüllü katılımcılar ile görüşmeler yapılmıştır.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını Batı Karadeniz Bölgesindeki bir ilde yer alan bir üniversitenin eğitim fakültesi ilköğretim matematik eğitimi anabilim dalında 2. ve 3. sınıfta öğrenimlerine devam eden 158 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma için gerekli veri 2013-2014 öğretim yılı bahar döneminin sonunda toplanmıştır. Bu sınıfların seçilmesinin nedeni öğretmen adaylarının Genel Matematik, Analiz I ve II derslerini almış olmalarıdır. Genel matematik dersi kapsamında “doğal sayılar kümesi, tamsayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi, gerçel sayılar kümesi ve özelliklerinin” ele alınmış olması, Analiz I ve II derslerinde ise reel sayılar kümesi üzerinde çalışılmış olması öğretmen adaylarının reel sayılar kümesi ve alt kümeleri hakkında güçlü bir bilgiye sahip olmalarını gerektirmektedir. Ayrıca, gönüllü 10 öğretmen adayı ile testteki sorulara vermiş oldukları cevaplar hakkında görüşme yapılmıştır. Görüşmeye katılan öğretmen adayları K1, K2, ... şeklinde isimlendirilmiştir.

Veri Toplama Aracı ve Süreci

Araştırma için gerekli veri Reel Sayılar Testi ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler yoluyla elde edilmiştir. Reel Sayılar Testi literatürde sıklıkla sorulan sorular (bkz. Fischbein, Jehiam ve Cohen, 1995; Sirotic ve Zaskis, 2007a) temel alınarak araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Testte üç bölüm bulunmaktadır. Birinci bölümde farklı temsil türlerinde verilen 21 sayının rasyonel ya da irrasyonel sayı olduğunun belirlenmesi, ikinci bölümde rasyonel ve irrasyonel sayıların tanımlanması ve son bölümde de reel sayıların alt kümeleri ile birlikte şema ile gösterilmesi istenmiştir. Testin birinci bölümündeki rasyonel ve irrasyonel sayıların temsil türlerine ve bu temsil türlerinin şeffaf ve opak olmasına göre dağılımı Tablo 1’de sunulmuştur. Temsil türleri şeffaf ve opak olmasına göre gruplandırılırken Zaskis ve Sirotic’in (2010) sınıflaması ve ortaokul 7. ve 8. sınıf matematik ders kitabındaki tanımlar temel alınmıştır (MEB, 2013, 2014). Rasyonel sayılar 7. sınıf ders kitabında “*a bir tam sayı, b de sıfırdan farklı bir tam sayı olmak üzere a/b biçiminde yazılabilen sayılar*” olarak tanımlanmaktadır (s. 17). İrrasyo-

nel sayılar ise 8. sınıf ders kitabında “*a ve b iki tam sayı, $b \neq 0$ olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar, a/b şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayılar denir*” şeklinde tanımlanmaktadır (s. 65). Rasyonel sayılarda 4 farklı temsil (14 sayı), irrasyonel sayılarda ise 3 farklı temsil (7 sayı) kullanılmıştır. Rasyonel sayılarda kesir ve tam sayı temsilleri şeffaf, irrasyonel sayılarda ise ondalık gösterim şeffaf temsil olarak ele alınmıştır. Diğer temsil türleri ise her iki sayı için de opak temsiller olarak değerlendirilmiştir. Test hazırlandıktan sonra kapsam geçerliliği için 3 alan uzmanından testte yer alan sayıların ve soruların araştırmanın amacına uygunluğu açısından görüşler alınmıştır. Testin güvenilirlik katsayısı olarak testin puanlanma şeklinin bir sonucu olarak Kuder Richardson-20 (KR-20) iç tutarlılık katsayısı 0.806 bulunmuştur.

Yarı-yapılandırılmış görüşmeler Reel Sayılar Testi uygulandıktan sonra yapılmıştır. Katılımcıların öncelikle testte yapmış olduğu tanımlar incelenmiş, daha sonra bu tanımlar birinci bölümdeki sayıları rasyonel ya da irrasyonel olarak belirlemeleri ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalara göre belirlenen katılımcılara görüşme teklifi yapılmış ve aralarından gönüllü olan 10 öğretmen adayı ile testte vermiş oldukları cevaplar hakkında derinlemesine görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler ortalama 25 dakika sürmüştür ve ses kaydı yapılmıştır. Görüşmelerde öğretmen adaylarına sayıları neden rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirledikleri, bir sayıyı rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlerken hangi özelliklere dikkat ettikleri ve sayıları belirlerken yaptıkları tanımları kullanıp kullanmadıkları gibi sorular sorulmuştur.

Tablo 1. Reel sayılar testindeki sayıların temsil türlerine göre dağılımı

	Rasyonel sayılar				İrrasyonel sayılar		
	Kesir	Tam s.	Ondalık	Kök	Ondalık	pi	Kök
Şeffaf	s1, s8, s18	s4, s14			s6, s11		
Opak			s5, s10, s13, s17, s19, s20	s7, s9, s12		s2, s21	s3, s15, s16
Toplam	3	2	6	3	2	2	3

Veri Analizi

Temsil türlerine göre karşılaştırma yapabilmek için, reel sayılar testinin birinci bölümünden elde edilen verilerin puanlamasında verilen sayının rasyonel ya da irrasyonel olmasının doğru seçilmesi “1”, yanlış seçilmesi durumunda ise “0” olarak puanlanmıştır. Daha sonra bu puanlar rasyonel ve irrasyonel sayıları belirlemedeki başarı, rasyonel ve irrasyonel sayıların temsil türlerine ve temsil türlerinin şeffaf ve opak olmasına göre karşılaştırma yapabilmek için kategorilere ayrılmıştır. Oluşan kategorilerde yer alan madde sayıları denk olmadığından puanlar o kategori için alınabilecek en yüksek puana bölünerek standartlaştırılmış puanlar elde edilmiştir. Bunun sonucu olarak her bir kategori için alınabilecek en düşük puan “0” ve en yüksek puan “1”dir. Böylece her bir değerlendirme birimi için benzer puanlama kullanılmıştır. Karşılaştırma testlerinde verilerin normal olup olmamasına bağlı olarak farklı istatistiksel analizler kullanılmaktadır. Bu nedenle analizlere başlamadan önce tüm verilere sayıların rasyonel ve irrasyonel olmasına, temsil türlerine, temsil türlerinin şeffaf ve opak olma durumuna göre alt kate-

gorilerde normallik testi yapılmıştır. Bütün kategoriler için hesaplanan olasılık değerleri $p < .05$ olması nedeniyle bu kategoriler normal dağılım sergilemediği için nonparametrik testler kullanılmıştır. Reel sayılar testinin diğer 2 bölümündeki açık uçlu sorulara verilen cevaplar ve görüşme transkriptlerinde elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Öncelikle testten elde edilen veriler incelenmiş ve ortaya çıkan temalar belirlenmiştir. Daha sonra bu temalara göre verilen cevapların yüzdeleri hesaplanmıştır. Son olarak görüşme verileri ortaya çıkan temalara göre analiz edilmiştir. Karşılaştırma testlerinden elde edilen sonuçlar nitel verilerden elde edilen bulgularla desteklenmiştir.

3. Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın bulgular iki bölümde sunulmuştur. Birinci bölümde temsil türleri ile ilgili bulgular ve ikinci bölümde ise öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıları kavrayışları sunulan tanımlar, şemalar ve görüşmeler yoluyla açıklanmıştır.

3.1. Temsil türlerinin öğretmen adaylarının reel sayıları kavrayışına etkisi

Öğretmen adaylarının öncelikle rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılardan elde ettikleri ortalama puanlar karşılaştırılmıştır. Rasyonel sayıların ortalama puanı ($\bar{x} = .6388$) irrasyonel sayıların ortalama puanından ($\bar{x} = .5615$) yüksektir. İki puan türü arasındaki bu farkın anlamlı olup olmadığını test etmek amacıyla yapılan Wilcoxon işaretli sıralar testinin sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Rasyonel sayı ve irrasyonel sayı puanları için Wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

İrrasyonel sayı -rasyonel sayı	n	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	z	p
Negatif Sıra	87	73.16	6364.50	-2.980*	.003
Pozitif Sıra	53	66.14	3505.50		
Eşit	18				

* Pozitif sıralar temeline dayalı düzenlenmiştir.

Tablo 2’deki sonuçlar, öğretmen adaylarının reel sayıların rasyonel sayı ve irrasyonel sayı olmasına göre aldıkları puanların ortalamaları arasında anlamlı farklılık olduğunu göstermektedir ($z = -2.980$, $p < .05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplam puanlar dikkate alındığında, gözlenen bu farkın rasyonel sayı puanları lehinde olduğu görülmektedir. Buradan, öğretmen adaylarının, rasyonel sayıları daha kolay tanıdıkları söylenebilir.

Öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel sayı ve irrasyonel sayı olarak belirlemedeki başarılarının temsil türlerine göre farklılık gösterip göstermediği (Tablo 3) incelendiğinde, rasyonel sayıların temsilinde en yüksek ortalamanın 0.8397 ile kesir temsiline ve en düşük ortalamanın ise 0.4494 ile kök temsiline ait olduğu görülmektedir. İrrasyonel sayıların temsillerinin ortalamaları incelendiğinde ise en yüksek ortalamaya 0.8333 ile kök temsili ve en düşük ortalamaya 0.2753 ile ondalık temsili sahiptir. Öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel sayı ve irrasyonel sayı olarak belirlemedeki

başarılarının temsil türlerine göre farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla yapılan Friedman testinin sonuçları ve ilgili istatistikler Tablo 3’de verilmiştir. Analiz sonuçlarına göre rasyonel sayıların temsil türlerine göre öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel sayı olarak belirlemedeki başarıları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu belirlenmiştir ($\chi^2_{(4)} = 126.002$, $p < .05$). Benzer şekilde, irrasyonel sayıların temsil türlerine göre öğretmen adaylarının reel sayıları irrasyonel sayı olarak belirlemedeki başarıları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olduğu ortaya çıkmıştır ($\chi^2_{(2)} = 118.805$, $p < .05$).

Tablo 3. Rasyonel sayı ve irrasyonel sayıların temsil türleri için Friedman testi sonuçları

	Temsiller	\bar{X}	n	Sıra Ort.	sd	χ^2	p
Rasyonel Sayı	Kesir	.8397	158	3.16	3	126.002	.000
	Tam sayı	.7025	158	2.84			
	Ondalık	.6118	158	2.07			
	Kök	.4494	158	1.93			
İrrasyonel sayı	Pi	.4399	158	1.90	2	118.805	.000
	Kök	.8333	158	2.53			
	Ondalık	.2753	158	1.58			

Bu farkların hangi temsil ya da temsiller lehine olduğunu anlamak amacıyla çoklu karşılaştırmalar ve değişik sayıda ikili Wilcoxon işaretli sıralar testleri yapılmıştır. Yapılan testler sonucunda rasyonel sayıların temsil türleri arasındaki gözlenen farklar incelendiğinde, gözlenen bu farkın; diğer temsil türlerine göre kesir temsiline lehinde olduğu görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının rasyonel sayıları daha çok kesir gösterimi ile ilişkilendirdikleri ve dolayısıyla bu temsiline rasyonel sayıları şeffaf bir şekilde temsil ettiğini söyleyebiliriz. İrrasyonel sayıların temsillerinin analiz sonuçları incelendiğinde gözlenen farkın pi temsili ve ondalık temsile göre kök temsiline lehine olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının irrasyonel sayılar söz konusu olduğunda ondalık temsiline aksine kök temsiline bu sayılarla daha çok ilişkilendirdikleri sonucu çıkarılabilir.

Öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel sayı ve irrasyonel sayı olarak belirlemedeki başarılarının temsil türlerinin şeffaf ve opak olmasına göre farklılık gösterip göstermediğini test etmek amacıyla yapılan Wilcoxon işaretli sıralar testinin sonuçları Tablo 4’de sunulmuştur. Öğretmen adaylarının reel sayıları rasyonel sayı olarak belirlemede temsillerin şeffaf ($\bar{x} = .7848$) ve opak ($\bar{x} = .5577$) olmasına göre aldıkları puanların ortalamaları arasında anlamlı farklılık olduğu görülmektedir ($z = -9.482$, $p < .05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplam puanlar dikkate alındığında, gözlenen bu farkın şeffaf temsil puanları lehinde olduğu görülmektedir. Benzer şekilde, öğretmen adaylarının reel sayıları irrasyonel sayı olarak belirlemede temsillerin şeffaf ($\bar{x} = .2753$) ve opak ($\bar{x} = .6759$) olmasına göre aldıkları puanların ortalamaları arasında anlamlı farklılık olduğu görülmektedir ($z = -8.840$, $p < .05$). Fark puanlarının sıra ortalaması ve toplam puanlar dikkate alındığında, gözlenen bu farkın opak temsil puanları lehinde

olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle, öğretmen adayları için reel sayıların kesir ve tam sayı biçimindeki temsilleri sayının rasyonel olmasının göstergesiyken, kök temsili ise sonsuza kadar devirsiz ilerleyen ondalık temsiline göre irrasyonel sayı olmasının göstergesi olduğu söylenebilir.

Tablo 4. Rasyonel sayı ve irrasyonel sayıların şeffaf ve opak temsillerinin puanları için Wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

		n	Sıra Ort.	Sıra Toplamı	z	p	
Rasyonel Sayı	opak-şeffaf	Negatif Sıra	134	81.82	10964.50	-9.482 ^a	.000
		Pozitif Sıra	18	36.86	663.50		
		Eşit	6				
İrrasyonel Sayı	opak-şeffaf	Negatif Sıra	12	31.46	377.50	-8.840 ^b	.000
		Pozitif Sıra	112	6583	7372.50		
		Eşit	34				

^a Pozitif sıralar temeline dayalı düzenlenmiştir.

^b Negatif sıralar temeline dayalı düzenlenmiştir.

Sonuç olarak, araştırmaya katılan ortaokul matematik öğretmeni adayları verilen sayıların rasyonel ya da irrasyonelliğini belirlemede güçlük yaşamaktadırlar. Öğretmen adaylarının bu sayıları belirleme başarısı sayıların temsil biçimine göre farklılaşmaktadır. Öğretmen adayları rasyonel sayıları kesir ve tam sayı olarak gösterildiğinde ve irrasyonel sayıları ise köklü temsil edildiğinde daha kolay belirleyebilmektedirler. Bir sonraki bölümde bu güçlüklerin nedenleri nitel verilerle açıklanmaya çalışılacaktır.

3.1. Reel Sayıları Belirlemedeki Güçlüklerin Nedenleri

Görüşmeler ve katılımcıların testte rasyonel ve irrasyonel sayılar için yapmış olduğu tanımlar öğretmen adaylarının reel sayılarda yaşadıkları güçlüklerin nedenlerini ortaya koymaktadır. Bu nedenler şu şekilde sıralanabilir: tanımlardaki yetersizlikler, temsil türüne göre sayının türünün değiştiği düşüncesi, algoritmaların işlevlerini anlayamama.

Katılımcıların testte rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlamak için verdiği cevaplarından elde edilen temalar ve görüşme yapılan katılımcılarda baskın olan düşünceler Tablo 5’de özetlenmiştir. Tablo 5 incelendiğinde katılımcıların rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımlamakta zorlandığı görülmektedir. Katılımcıların sadece %27.8’inin rasyonel sayıların formal tanımını yapabildiği ve genellikle rasyonel sayıyı pay ve paydadandan oluşan sayılar (%29.1) ya da iki sayının bölümü (%16.5) olarak tanımladıkları görülmektedir. Bu bulgular katılımcıların rasyonel sayılarda neden kesir biçiminde gösterildiği zaman daha başarılı olduğunu açıklamaktadır. Diğer bir yandan, katılımcıların önemli bir bölümünün (%46.9) irrasyonel sayıyı rasyonel sayıya bağlı olarak “rasyonel olmayan” şeklinde tanımlaması, bu öğretmen adayları için verilen sayıların irrasyonel olmasında rasyonel sayı ile ilgili düşüncelerinin etkili olduğu söylenebilir. Katılımcıların yaklaşık

%70'inin rasyonel sayıyı doğru tanımlayamamış olması da Reel Sayılar testinde verilen sayıların rasyonel ya da irrasyonel olduğunu belirleme başarılarını etkilemiş olabilir.

Tablo 5. Öğretmen adaylarının rasyonel ve irrasyonel sayıları tanımları

	Temalar	f	%	Katılımcılar
Rasyonel Sayı	Pay ve payda şeklinde ifade edilen	46	29.1	K2,K5,K7,K8,K9
	$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a/b$ şeklinde	44	27.8	K10
	Doğal, tam, kesir, ondalık sayıları içine alan	28	17.8	K3,K4,K6
	İki sayının/reel sayının/doğal sayının bölümü	26	16.5	K1
	Diğer	14	8.8	
	Toplam	158	100	
İrrasyonel sayı	Rasyonel olmayan	74	46.9	K10,K2,K3,K5,K8
	Kök dışına çıkamayan/köklü sayılar	34	21.5	K4,K5,K9
	Karmaşık sayılar	14	8.9	K6,K7,K8
	Sonsuza giden ondalık sayılar	14	8.9	K2, K10, K4, K3
	Net sonucu olmayan, sürekli değişen sayılar	13	8.2	K1
	Diğer	9	5.6	
	Toplam	158	100	

Öğretmen adaylarının reel sayılarla yaşadığı güçlüklerin bir diğer nedeni ise sayının temsil biçimine göre türünün değiştiği düşüncesinin yaygın olmasıdır. Görüşmelerde rasyonel sayıları pay ve paydadın oluşan sayılar ya da bölme işlemi olarak tanımlayan katılımcılar görüşmelerde de genellikle rasyonel sayıyı tam sayı olarak ya da sonlu ondalık sayılar, irrasyonel sayıyı da sonsuza kadar giden ondalık sayılar olarak algılamışlardır. Bu katılımcılar, düşüncelerini payı paydaya bölerek, bölme işleminin sonucunda ortaya çıkan sonsuz basamaklı ondalık sayının değerinin kesin olmadığını, hatta sayının sürekli değiştiğini iddia etmişlerdir. Görüşmelerde, dört katılımcı (K1, K2, K3 ve K10) bu eğilimi sergilemişlerdir. Aşağıdaki alıntıda, K1'in temsillere göre sayının türünün değişebileceğini düşündüğü görülmektedir.

A: Peki $1/3$ yazalım, $0.333\dots$ böyle gider. Bu ikisi hakkında ne düşünüyorsun?

K1: [*Düşünüyor*] Kafam karıştı hocam. $1/3$ olunca, rasyonel, böyle [$0.333\dots$] yazılınca da rasyonel olmuyor hocam

A: Bu ikisi aynı şeyi mi gösteriyor?

K1: Sanırım öyle.

Yukarıdaki alıntıdan, katılımcı K1'in bir sayının rasyonel ya da irrasyonel olmasının sayının yazılışına bağlı olduğuna inandığını söyleyebiliriz. Bir başka deyişle, K1 için bir sayı kesir ise rasyonel, fakat kesrin eşiti olan ondalık temsili ise irrasyoneldir. Benzer şekilde aşağıda da görüldüğü gibi katılımcı K2, $3, \overline{14}$ 'ü kesir olarak yazmasına rağmen, sayının irrasyonel olduğunu iddia etmektedir. K2 devirli ondalık sayıları kesre çevirme algoritmasının işlevini anlayamamış, bu algoritmanın sayıları değil sayıların temsil-

lerini dönüştürdüğünü fark edememiştir.

A: $3,1\bar{4}$ 'e irrasyonel sayı demişsin. Neden?

K2: Devreden olduğu için irrasyonel dedim. Çünkü sonu yok dedim böyle gider gider o yüzden onu tam yazamayız diye düşündüm. ... Ama sınavdan sonra baktım hani hep yaptığımız şey var ya 314 eksi devretmeyen kısım bölü devreden kadar 9 yazıyoruz ya.

A: O zaman bir sayının senin için rasyonel sayı olması için ne gerekli?

K2: Sonsuza gitmemesi, bir yerde kesilmesi lazım... Bir de illa kesir olması gerekmiyor çünkü $4/1$ de kesir olarak yazılmamış fakat o da bir rasyonel sayı.

A: Peki $34,2727\dots$?

K2: Aynı şekilde düşündüm irrasyonel sayının sonu yoktur diye düşündüm o yüzden rasyonel sayı olamaz diye düşündüm... Benim için bir sayının sonsuza kadar gitmesi irrasyonel sayı olması demek. O zaman da reel sayı olamaz.

Sayıların temsillerinin etkisinin bir örneği de katılımcı K3 ile yapılan görüşmede de ortaya çıkmıştır. K3, görüşmede, kesirli gösterimleri rasyonel sayı olarak belirlemede zorlanmazken devirli ondalık gösterimlerde kesirli yazabilmesine rağmen gösterim biçiminden etkilenmiştir.

A: $3,1\bar{4}$ sence rasyonel mi yoksa irrasyonel sayı mı?

K3: O irrasyonel oluyor çünkü devirli sayılar gidiyor, gidiyor ya ama bunu çevirdiğimizde payı paydası oluyor ama devirli olduğunda $14, 14$ gidiyor ya

A: İrrasyonel sayı olması için ondalık kısmın sonsuz mu olması gerekiyor?

K3: Evet sadece yaklaşık değerini söyleyebiliriz kesin değil. Kesin değerini bilemeyiz.

A: Tamam. $3,14$ ile $3,1\bar{4}$ arasında nasıl bir fark var?

K3: Biri rasyonel diğeri irrasyonel ama diğeri de kurala göre yazarsam kesir olur onun da kesin sonucunu bulabilirim... ama bunu aç dersenez $3,1414\dots$ sonsuza gider irrasyonel olur. Yani kesri ondalık diye düşünüyorum, sonsuza gidiyor o zaman irrasyonel diyorum. Kesir zaten kurala elde ediliyor aslında o sonsuza giden bir sayı.

Farklı bir katılımcı K4 de benzer şekilde köklü temsili doğrudan irrasyonellik ile ilişkilendirerek verilen sayıyı tam kare de olsa irrasyonel sayı olarak düşünmüştür.

A: $\sqrt[3]{216}$ sence rasyonel mi yoksa irrasyonel sayı mı?

K4: Bir sayının küpü mü biliyorum ama öyle olsa bile doğal sayı, tam

sayı aynı zaman da irrasyonel olur. Köklü sayılar irrasyonel ya öyle biliyorum ben köklü sayılar reel sayı mı onu karıştırdım ama.

Sayının temsiline göre rasyonel ya da irrasyonel olmasının değiştiği düşüncesi katılımcı K4'de belirgin bir şekilde kendini göstermiştir. K4, sayı 4 olarak verince rasyonel olduğunu, $\sqrt{16}$ olarak verildiğinde ise sayının irrasyonel olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda da görüldüğü gibi K5 de aynı şekilde düşünmüştür.

A: Buna ($\sqrt{16}$) irrasyonel sayı demişsin. Sence neden irrasyonel sayı?

K5: Hocam köklü ifade olduğu için.

A: Her köklü ifade bir irrasyonel sayı mıdır?

K5: Onu tam çıkarabildiğim için doğal sayı, negatif olduğu için tam sayı ama kök 16 diye bakarsak irrasyonel sayı olur.

A: O zaman 4 bir irrasyonel sayı mıdır?

K5: Hocam kök 16 diye bakarsak irrasyonel ama tam çıkınca doğal sayı olur.

A: O zaman sayının gösterimine göre değişir mi ne olduğu

K5: Değişir hocam. Soruya göre de değişir.

Benzer düşünceye sahip olan katılımcı K9, $\sqrt{2}/7$ sayısına, hem rasyonel hem de irrasyonel demiştir. Bu katılımcı, rasyonel sayıları pay ve paydası olan sayılar, irrasyonel sayıları ise köklü sayılar olarak tanımlamaktadır.

A: Peki kök 2 bölü 7 nerede?

K9: *düşünüyor...* Paydası olduğu için rasyonel ama köklü ifade de var.

O zaman irrasyonel olur. O zaman her ikisi.

Bazı katılımcılar (K6, K7 ve K8) irrasyonel sayıları karmaşık sayılar ile karıştırmışlardır. Katılımcı K6 ile yapılan görüşmeden alıntı aşağıdadır.

K6: *Gülüyor.* ... ben aslında irrasyonel sayıyı kafamda hani biz i yazıyoruz ya karmaşık sayılar, aslında ben onu düşündüm.

Katılımcıların reel sayılar kümesini alt kümeleri ile birlikte gösterdikleri şemalar incelendiğinde, öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının (%52) doğru cevap verdiği gözlenmiştir. Şemalarda karşılaşılan hatalardan en yaygın rasyonel ve irrasyonel sayıların kesişiminin olduğunun düşünülmesidir. Bir başka deyişle bu öğretmen adayları bir reel sayının hem rasyonel hem de irrasyonel sayı olabileceğini düşünmüşlerdir. Bu bulgu, neden öğretmen adaylarının bir sayının temsil biçimine göre hem rasyonel hem de irrasyonel olabileceğini düşündüğünü de açıklamaktadır.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Araştırmanın bulguları ortaokul matematik öğretmeni adaylarının farklı şekillerde temsil edilmiş reel sayılardan rasyonel olanları belirlemede daha başarılı olduğunu göstermiştir. Aynı zamanda, reel sayıların temsillerindeki çeşitliliğin bu sayıları rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlenmesini zorlaştırdığı ortaya çıkmıştır. Farklı temsil tür-

leri ile ilgili karşılaştırmalar, öğretmen adaylarının rasyonel sayıları genellikle kesir ve tam sayı ile ilişkilendirdiklerini, irrasyonel sayıları ise kök temsili ile eşleştirdiklerini ve bu temsillerde daha başarılı olduklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının bu sayıları tanımlamaları da rasyonel sayının kesirli temsili, irrasyonel sayının ise köklü temsili işaret etmektedir. Temsil türlerinin şeffaf ve opak olmasına göre yapılan karşılaştırmalarda ise rasyonel sayılarda şeffaf temsil, irrasyonel sayılarda ise opak temsil lehine fark ortaya çıkmıştır. Bir başka deyişle, Sirotic ve Zaskis'in (2010) ve irrasyonel sayının tanımının işaret ettiği şeffaf temsil biçimi olan sonsuza kadar ilerleyen ondalık temsili-nin aksine, bu araştırmaya katılan öğretmen adayları köklü temsilleri daha sık irrasyonel sayı olarak algıladığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının irrasyonel sayıların köklü temsillerinde daha başarılı olmalarının nedeni olarak ortaokul matematik derslerinde irrasyonel sayı kavramının köklü ifadelerden hemen sonra öğretilmesi gösterilebilir.

Öğretmen adaylarının neredeyse yarısının irrasyonel sayıyı rasyonel olmayan şekilde tanımlaması, irrasyonel sayı kavramını rasyonel sayıya dair düşüncelerine dayandırdıklarının bir göstergesidir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının rasyonel sayıya dair kavrayışlarının irrasyonel sayı kavramını anlama yolunda önemli bir değişken olduğu söylenebilir. Fakat bu araştırmada birbiriyle ilişkili iki önemli matematiksel ilkenin anlaşılmasının öğretmen adaylarının rasyonel sayıyı ve dolayısıyla da irrasyonel sayı kavramını anlamalarını zorlaştırdığını göstermiştir. Bu ilkelerden biri farklı temsillerin aynı sayıyı göstermesi, diğeri ise iki tam sayının bölümünün her zaman sonlu ya da devirli ondalık sayı olmasıdır. Görüşmelerde öğretmen adayları rasyonel sayıların farklı temsillerinin, farklı sayıları gösterdiğini düşünerek cevap verme eğilimi içine girmişlerdir. Örneğin bir rasyonel sayının kesirli gösterimi ile eşiti olan devirli ondalık gösterimini farklı iki sayı olarak değerlendirmişler, kesirli temsili rasyonel, devirli ondalık temsili ise irrasyonel olarak tanımlamışlardır. Benzer şekilde, irrasyonel sayılarda öğretmen adayları köklü temsili genellikle irrasyonel sayı ile ilişkilendirmiş ve kök içindeki sayı tam kare olsa da sayıyı hem doğal ve tam sayı hem de irrasyonel sayı olarak tanımlamışlardır. Ayrıca, bu öğretmen adayları iki tam sayının bölümünün her zaman sonlu ya da devirli ondalık sayı olduğunu fark edememiştir. Öğretmen adaylarındaki bu eğilimi Sinclair ve diğ. (2006) ve Zaskis ve Sirotic (2010) de gözlemlenmiştir. Sinclair ve diğ. ondalık temsilleri kesir temsiline dönüştürme algoritmasını başarıyla kullanan bazı öğretmen adaylarının algoritmanın çıktısı olan kesir ile ondalık sayıyı ilişkilendirmediklerini ve hatta bunları iki farklı sayı gibi düşündüklerini ifade etmiştir. Zaskis ve Sirotic (2010) ise lise öğretmen adaylarının da iki tam sayının bölümünün ne zaman ve nasıl devirli ondalık sayı ile sonuçlandığını ve her devirli ondalık sayının da iki tam sayının oranı şeklinde yazılabileceğini anlamadığını ve bu nedenle de irrasyonel sayı kavramını anlayamadıkları sonucuna varmıştır.

Farklı sayı kümelerinin tanımları belli temsilleri işaret eder. Bir sayının bir kümeyle ait olup olmadığına karar verirken sayının tanımında işaret edilen biçimde temsil edilip edilemediğine bakılır. Fakat bu araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının bu sayıları doğru tanımlamalarının ve şema ile doğru göstermelerinin verilen herhangi bir reel sayının rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlemelerinde çok etkili olmadığını göstermiştir. Öğretmen adayları, verilen herhangi bir reel sayıyı rasyonel ya da irrasyonel sayı olarak belirlerken tanım ve formal bilgilerden ziyade, geçmiş deneyimlerine göre bu sayılarla ilişkilendirdikleri temsil türlerini kullandıkları gözlenmiştir. Kaput'a (1987) göre

okul programlarında sayıların temsillere duyarlı olan özellikleri ile göreceli olarak temsilden bağımsız özellikleri arasındaki ayrıma gerekli dikkat verilmemektedir. Bu araştırmada öğretmen adayları $1/3, \sqrt{16}$ ya da 34.2727... örneklerinde olduğu gibi bir temsile dikkatlerini vererek, alternatif temsillerin olabileceği olasılığını göz ardı etmektedirler. Zaskis ve Gadowsky (2001) de benzer sonuçlar elde etmiştir. Zaskis ve Gadowsky'ye göre öğrencilerin sayı algıları okuldaki sayıların yapısından çok sayılarla hesaplamalara daha fazla önem verilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu araştırmada da öğretmen adayları sık sık matematik derslerinde bu sayıların ne olduğunun kendilerine sorulmadığının, önemli olanın bu sayılarla işlem yapmaları olduğunun altını çizmişlerdir.

Öğretmen adaylarının üniversitede almış oldukları matematik derslerinin sayısı ve düzeyi düşünüldüğünde ve rasyonel, irrasyonel ve reel sayı kavramlarının ilk kez ortaokulda öğretildiği göz önüne alındığında elde edilen bulgular kaygı vericidir. Bu bulgular ışığında, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının reel sayılarla kavrayışlarını geliştirmek için üniversitedeki alan ve öğretim derslerinde öğretmen adaylarının mevcut kavrayışları ortaya çıkarılmalı, kavrayışlarındaki yetersizlikleri ve çelişkileri fark etmeleri sağlanmalı ve bu kavrayışları değiştirmelerini sağlayacak öğrenme fırsatları oluşturulmalıdır. Bu öğrenme etkinliklerinde sayıların farklı temsilleri arasındaki ilişki ve temsiller arası dönüşüm için kullanılan algoritmaların işlevleri vurgulanmalıdır. Son olarak, bu kavramların ilk kez ortaokulda nasıl öğretildiği ve öğretmenlerin kavrayışlarının öğretimlerini nasıl etkilediğinin ortaya çıkarılmasının alana önemli katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

5. Kaynakça

- Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R., (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 18–23.
- Creswell, J. W. (2008). *Educational research planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research*. International Pearson Merrill Prentice Hall.
- Cuoco, A. (Ed.). (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 1, 29–44.
- Kara, F. ve Delice, A. (2012). Kavram tanımı mı? Yoksa kavram imgeleri mi? İrrasyonel sayıların temsilleri. *X.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. Niğde, Türkiye.
- Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics? In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-28). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Behr, M., & Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41–58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- MEB, (2013). *İlköğretim 7. sınıf matematik ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.
- MEB, (2014). *İlköğretim 8. sınıf matematik ders kitabı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.
- Sinclair, N., Liljedahl, P., & Zaskis, R. (2006). A coloured window on pre-service teachers' conceptions of rational numbers. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 177–203.
- Sirotic, N., & Zaskis, R. (2007a). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive know-

- ledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 49–76.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers on the number line – where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477-488, DOI: 10.1080/00207390601151828
- Temel, H. ve Eroğlu, A. O. (2014). İlköğretim 8.sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırılmaları üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(3), 1263-1278.
- Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A., & Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*, Retrieved January 19th, 2015 from the World Wide Web: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts/Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html>.
- Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation, *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209, DOI: 10.1080/07370001003676603.
- Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The Role of Representations in Learning Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164–186.
- Zazkis, R., & Sirotic, N., (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 1-27.

Extended Abstract

Real numbers consisting of rational and irrational numbers have a central role in school mathematics and these numbers are quite difficult for students to understand. In middle school, students learn rational and irrational numbers and then extend the concept of number from natural numbers to real numbers. However, prior research have shown that high school teachers and students have an inadequate understanding of these numbers (e.g., Fischbein et al., 1995; Kara ve Delice, 2012; Temel ve Eroğlu, 2014). When we consider the fact that students first meet with these numbers in the middle school, there is a need for a study on the middle school preservice teachers' conceptions of real numbers. Furthermore, some studies showed that representations of real numbers have an influence on students' understanding of real numbers. Therefore, purpose of this study was to investigate the role of representations in the preservice middle school teachers' conceptions of real numbers. As a theoretical framework, the distinction of transparent and opaque representations introduced by Lesh et al. (1987) is used.

Mixed method design is used in this study. Participants of the study were 158 preservice elementary mathematics teachers attending 2nd and third year of their program at a university in West Black Sea region. Data was collected by a written questionnaire and interviews. Written questionnaire was developed by the researcher and consisted of three parts. First part included 21 real numbers with different type of representations and asked whether the numbers were rational or irrational. Second part was related to the definitions of rational and irrational numbers and last part was related to the representation of real numbers system with a diagram. Upon completion of the questionnaire 10 preservice teachers were interviewed. In order to determine the effect of representations on participants' conception of real numbers, non-parametric tests were used since the data was not normally distributed.

Analysis of the data indicated that preservice teachers performed better on rational number items than irrational numbers. Preservice teachers frequently associated rational numbers with a common fraction and integer representations while they mostly associate irrational numbers with radical expressions. This finding was confirmed by the results of the comparisons of representation types. It was found that type of representations of real numbers has a significant effect on the preservice teachers' success in determining a given real number as whether it was rational or irrational number. Comparisons showed that significant differences were found in favor of common fraction representation of rational numbers over other representation types. In case of irrational numbers, significant differences were found in favor of radical representations over other representations. When representations were grouped with respect to transparent and opaqueness, there was a significant difference in favor of transparent representation of rational and of opaque representation of irrational numbers. On the contrary to the literature, it was found that radical representation of irrational numbers were found to be a transparent representation of irrational number for the middle school preservice teachers. Almost half of the participants define irrational number as a nonrational number. This suggests that preservice teachers' conceptions of irrational number is primarily based on their understanding of rational number. However, it is observed that lack of an understanding of two related mathematical principles which are the equivalence of the representations of numbers and the quotient of two integers as terminating or repeating decimals creates an obstacle for understanding rational number. A striking observation is that many participants perceive that rationality or irrationality of a given real number depends on how it is written. When a number is given in common fraction

form, preservice teachers easily identify it as a rational number. However, when it is converted to its decimal representations they tend to identify it as an irrational number. Even some of the preservice teachers claim that whether a number is rational or irrational changes with respect to its representation. Some preservice teachers had difficulty in recognizing type of the real number even if they successfully converted the given representation to another representation they are more comfortable with by means of learnt algorithms. However, they usually do not understand that whatever the representation type is resulting numbers are equal. This suggests that preservice teachers perceive the application of algorithms as a process for transforming number type rather than the representation type. The results of the study suggest that preservice teachers need support for relearning the real numbers, rational and irrational numbers before they graduate. In content and methods courses, preservice teachers' existing understanding of these numbers need to be uncovered and challenged and they should have an opportunity to revise and change their existing understandings. In these activities, a greater emphasis on the influence of representation types on understanding of these numbers should be given. It is also recommended that a study on how these concepts are taught may shed some lights on this issue.